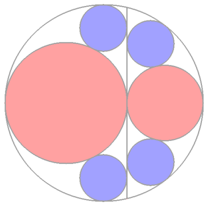
Conteúdo



COLÉGIO absoluto ANGLO

Edição, ilustrações, seções e artigos não assinados: Calixto Garcia

Revisão: Carmem Silvia P. S. de Lima

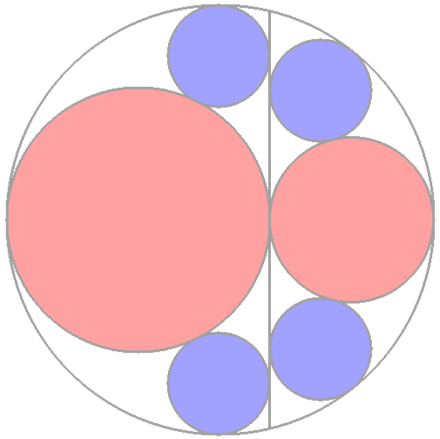
Esta edição está composta em *.doc*, fonte *Times New Roman*, corpo 12

Contatos: – *Colégio Absoluto - Anglo:*
Rua Antonio Nery, 550, Tietê, SP; A/C Prof. Calixto Garcia

– *E-mail - Prof. Calixto Garcia:*
klixg@yahoo.com.br

RMCA

REVISTA DE MATEMÁTICA
DO COLÉGIO ABSOLUTO



01

3º bimestre

2007

COLÉGIO absoluto ANGLO

Ao Leitor

A Revista de Matemática do Colégio Absoluto (RMCA) é uma publicação bimestral do ano letivo desta escola, destinada a alunos do Ensino Médio e professores que se interessam por esta área do conhecimento. Não obstante, pode (e deve) ser apreciada por alunos em qualquer nível de ensino ou pela comunidade em geral.

O escopo da revista é desenvolver o gosto pela Matemática e procurar satisfazer àqueles que por ela têm afinidade e admiração.

Artigos, curiosidades, problemas, experiências, desafios, notícias, painéis, notas históricas, entre outros, são exemplos de itens de que pretende ser constituída esta obra, ficando sujeita a modificações ao longo de sua existência, inclusive em formato, porte ou periodicidade.

É elaborada de forma artesanal, por assim dizer, devido a tratar-se de material com tiragem limitada. É composta em documento digital de texto, sendo oferecida na forma impressa.

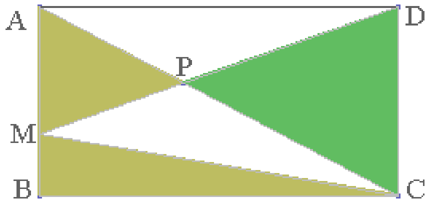
Contamos com a possibilidade de o leitor participar ativamente desta revista, colaborando com idéias, enviando resoluções dos problemas propostos ou até mesmo submetendo à nossa análise sugestões de artigos objetivando publicação.

Estabelecer mais um elo de ligação entre o professor de Matemática e os alunos é o compromisso precípuo deste trabalho. Esperamos contar com o apoio dos leitores por meio de sugestões para que esta iniciativa contribua cada vez mais com o aprendizado desta disciplina, considerada a Rainha das Ciências.

Calixto Garcia

Problemas

1 – Dado o retângulo ABCD da figura ao lado, explique por que a área do triângulo CDP é a soma das áreas dos triângulos APM e BCM.



2 – Uma floresta tem um milhão de árvores. Nenhuma delas tem mais de 300 mil folhas em sua copa. Pode-se concluir que:

a) certamente, existem árvores com copas de mesmo total de folhas nessa floresta

b) somente por acaso, haverá árvores com copas de igual total de folhas na floresta

c) certamente, há árvores com menos de 300 mil folhas em sua copa

d) o número médio de folhas nas copas é de 150 mil

e) nada do que foi dito pode ser concluído dos dados apresentados

3 – (*desafio*) Uma lebre está 50 pulos à frente de um cachorro, o qual dá 3 pulos no tempo que ela leva para dar 4. Sabendo que 2 pulos do cachorro valem 3 da lebre, quantos pulos ele deve dar para pegá-la?

Resposta do problema de programação linear:

O gasto mínimo se obterá enviando 30 unidades de mercadoria do depósito D_1 ao cliente A, 10 de D_1 a B, 30 de D_2 a B e nenhuma de D_2 a A.

As resoluções dos problemas desta seção serão sempre apresentadas em número seguinte da revista. Será publicada também a relação dos leitores que nos enviarem correta a resposta do desafio até o final do respectivo bimestre.

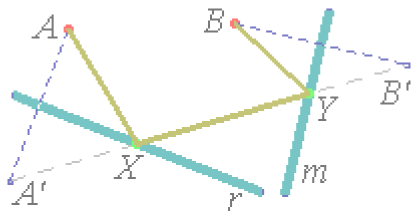
Construções Geométricas

As construções geométricas desempenham um papel relevante na Matemática. Possibilitam a aplicação e a revisão de conceitos adquiridos, resolvem muitas vezes situações aplicáveis ao cotidiano e seu estudo pode esclarecer a solução de problemas tradicionais em Geometria. Permitem assim o exercício de sua teoria, materializando idéias para melhor compreensão de seus conceitos.

A situação a seguir é um dos muitos exemplos que legitimam o poder de aplicação da construção geométrica no cotidiano.

É comprovado ser de menor distância o trajeto da luz entre dois pontos após reflexões sucessivas em espelhos planos. Esse fenômeno justifica um dito popular: *a natureza é sábia*.

Um comerciante que tem depósitos em A e B deseja fixar dois pontos de venda X e Y, cada qual nas estradas r e m como ilustrado abaixo. Onde devem estar localizados esses pontos, para que o caminho $AXYB$ tenha o menor comprimento possível?



Resolução:

Sejam A' o simétrico de A em relação à reta r e B' o simétrico de B em relação à reta m.

Como $AX = A'X$ e $BY = B'Y$, e estão alinhados os pontos A', X, Y e B', segue que $AXYB$ é a menor distância procurada.

Referências Bibliográficas

- GARCIA, C. *Vamos construir?* RPM nº 58, SBM, São Paulo, 2005.
- LEDERGERBER-RUOF, E. B. *Isometrias e ornamentos no plano euclidiano*. Atual Editora, São Paulo, 1982.

Dimensões inteiras

Na Matemática, há conceitos primitivos em Geometria, tais como o ponto, a reta e o plano para os quais atribuímos as dimensões 0, 1 e 2, respectivamente. Trata-se de entes geométricos que sugerem objetos cujas dimensões são mais pronunciadas.

O ser humano é capaz de “perceber” três dimensões. Tudo que observamos é tridimensional. Tudo tem seu comprimento, altura e largura, até mesmo uma folha de papel, por menor que seja sua espessura.

É possível desenhar no plano figuras de qualquer dimensão inteira. Ainda mais: que para tanto, uma pode servir como trampolim para a construção de outra, de dimensão uma unidade maior.

Por exemplo, para concebermos no plano uma figura em três dimensões a partir de um quadrilátero, desenhamos ao seu lado sua réplica e unimos convenientemente seus vértices, como podemos observar na transição entre as figuras 3 e 4 da ilustração abaixo.

Generalizando esse procedimento: dada uma figura com v vértices em dimensão n, construímos sua réplica transladada e unimos cada vértice de uma ao respectivo da outra, com segmentos. A figura resultante possuirá $2v$ vértices e terá dimensão $n + 1$.

Esta seqüência de figuras obedece à lógica desse processo:

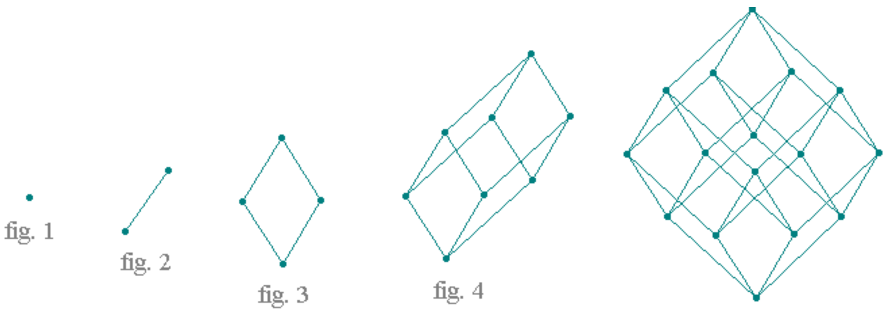
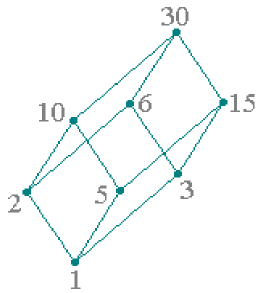


fig. 1 fig. 2 fig. 3 fig. 4 fig. 5

O número de vértices vai dobrando a cada passo. Daí, podemos concluir que, sendo n a dimensão de uma figura desta seqüência e v o número de vértices que possui,

$$v = 2^n, \text{ ou } n = \log_2 v.$$

Uma situação interessante é imaginar estas figuras como árvores de divisores de um número natural. Podemos alocar adequadamente cada divisor em cada vértice, de modo que os que estão numa posição inferior na árvore dividem os que a ele estão associados em posições superiores.



A figura ao lado mostra os divisores de 30 numa árvore tridimensional.

Faça o mesmo com outros números que apresentem 8 divisores (*).

Trata-se de uma atividade agradável que requer raciocínio no ato da colocação dos divisores nos vértices da figura.

Tente organizar os divisores de 210 (ou qualquer outro que possua 16 divisores) na árvore em quarta dimensão.

(*) Existe um método para obter números com certa quantidade de divisores? A resposta é sim.

Há uma infinidade de números com 8 divisores, por exemplo. Para se obter um deles, proceda da seguinte maneira: decomponha 8 como produto de fatores inteiros; utilize os antecessores de cada um desses fatores como expoentes de primos distintos quaisquer; efetue o produto das potências assim construídas. Tal produto possui 8 divisores.

Ex.: $8 = \underline{2} \cdot \underline{4} \quad \rightarrow \quad \underline{2} - 1 = \mathit{1}$ e $\underline{4} - 1 = \mathit{3} \quad \rightarrow \quad 7^{\mathit{1}} \cdot 2^{\mathit{3}} = \mathbf{56}$

Fabrique outros números com essa (ou outra) quantidade de divisores e procure explicar porque esse método funciona.

Trata-se de uma atividade que tem por finalidade desenvolver o raciocínio e a lógica dos que dela participam. A especificidade dos conteúdos envolvidos não é o que fundamentalmente se explora, e sim a criatividade com que são manipulados.

A preparação para as Olimpíadas de Matemática é essencial, aliás, a ação mais relevante neste processo. É no treinamento que se estreita a relação professor-aluno-Matemática.

Em geral, proporciona ao participante a melhoria no rendimento em outras disciplinas, sobretudo naquelas que se beneficiam de seu propósito. Não raro, a boa performance nestas competições é acompanhada de bom desempenho em provas de seleção.

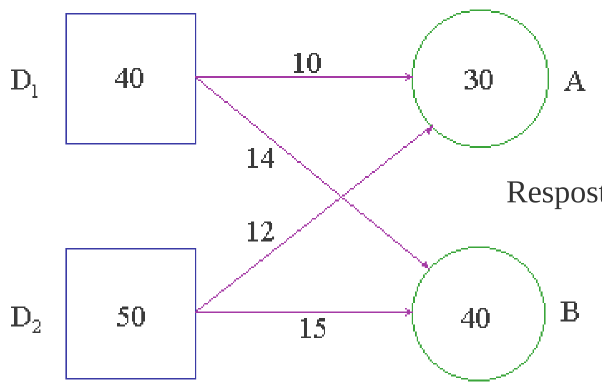
O reconhecimento do sucesso de um aluno nas Olimpíadas de Matemática também é importante, especialmente porque é objeto de distinção em seu currículo de vida.

Talentos nesta área existem. As olimpíadas consistem em mais um meio pelo qual esses talentos são revelados.

Estamos amadurecendo a idéia de promover em nível interno esta atividade. Informaremos os detalhes deste projeto também por esta revista, tão logo estiver devidamente encaminhado.

A nossa Escola oferece treinamento e participa oficialmente das Olimpíadas de Matemática da Unicamp (OMU), que está em sua 23ª edição. Ela é constituída de três fases que ocorrem normalmente nos meses de abril, junho e agosto. A prova da 1ª fase é realizada nas escolas participantes, cada qual podendo selecionar no máximo 15 alunos para a fase seguinte. As outras duas são realizadas nessa Universidade. De 100 alunos classificados para a última fase, são selecionados 40, que recebem, em encontro marcado no mês de outubro, a classificação e os certificados de participação.

Este ano, temos quatro participantes classificados para sua última fase. Desejamos boa sorte a esses guerreiros!



Resposta na página 10.

Referências Bibliográficas

- DANTE, L. R. *Matemática: Contexto e Aplicações*, Editora Ática, São Paulo, 1999.
- HADLEY, G. *Linear Programming*, Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts, 1963.

Olimpíadas de Matemática

Entre os matemáticos dos tempos antigos, era usual a proposição de desafios. Recentemente, surgiu uma atividade com características similares: as Olimpíadas de Matemática.

Essa prática teve início em 1896 na Hungria. Em 1959 ganhou nível internacional e em 1965 passou também a contar com a participação de países não socialistas. Hoje, ela existe em mais de 80 países, bem como compreende regiões dos mais diferentes níveis de abrangência no mundo.

Aqui no Brasil, em 1979, aconteceu o nosso primeiro torneio em nível nacional: as Olimpíadas Brasileiras de Matemática (OBM).

Programação Linear

Introdução

Os chamados problemas de otimização envolvem equações e inequações associadas a funções, as quais desejamos maximizar ou minimizar. Aparecem em várias situações do cotidiano, tais como em economia, transporte, dietas etc.

Quando equações e inequações lineares aparecem ao mesmo tempo nessas situações, dizemos que estamos diante de um problema de *programação linear*.

O método gráfico

Consideremos as seguintes situações-problema:

1 – Dois produtos P e Q contêm as vitaminas A, B e C nas quantidades indicadas no quadro abaixo. A última coluna indica a quantidade mínima necessária de cada vitamina para uma alimentação sadia, e a última linha indica o preço de cada produto por unidade. Que quantidade de cada produto uma dieta deve conter para que proporcione uma alimentação sadia com mínimo custo?

Resolução:

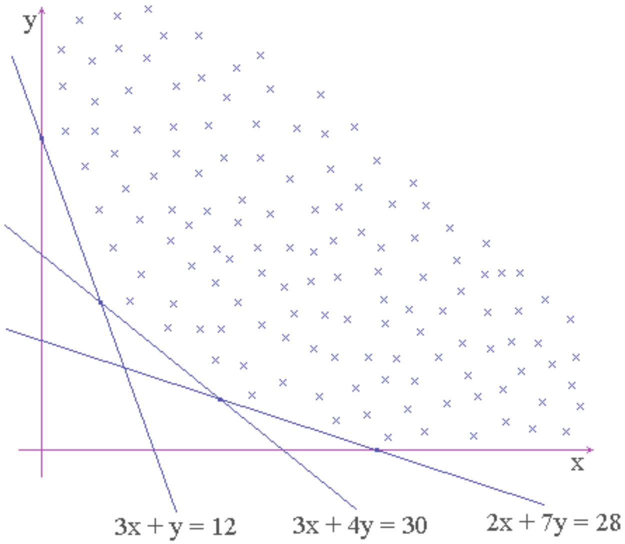
	P	Q	
A	3	1	12
B	3	4	30
C	2	7	28
	3	2	

Sejam x a quantidade do produto P e y a quantidade do produto Q, nas condições do enunciado.

Desta maneira, o custo que desejamos minimizar deve ser dado por: $C = 3x + 2y$. Tal função de duas variáveis está sujeita às seguintes restrições:

$$x \geq 0 \; ; \quad y \geq 0 \; ; \quad 3x + y \geq 12 \; ; \quad 3x + 4y \geq 30 \quad \text{e} \quad 2x + 7y \geq 28$$

Estas inequações produzem o seguinte gráfico:



A parte destacada é chamada de região de possibilidades. Prova-se que os vértices dessa região são os candidatos que nos conduzem à solução. Tais vértices são obtidos das intersecções entre as retas da figura acima, a saber: (0, 12), <u>(2, 6)</u>, (98/13, 24/13) e (14, 0). A cada um desses pares ordenados está associado um valor da função custo, iguais nesta ordem a: 24; <u>18 (valor mínimo)</u>; 26,3 e 42.

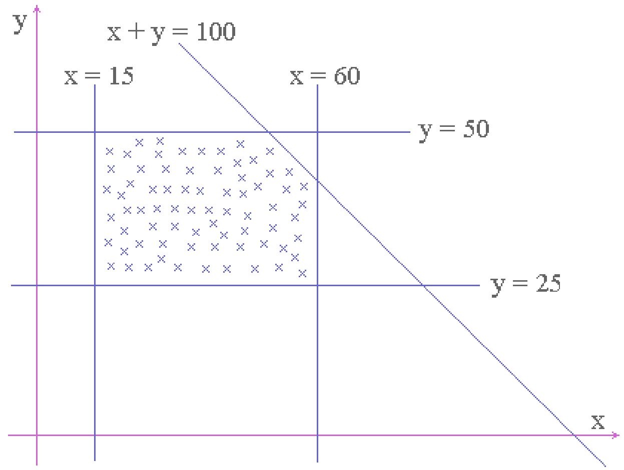
Conclusão: a dieta ótima, isto é, que é sadia e tem custo mínimo, consiste em consumir 2 unidades do produto P e 6 do produto Q.

2 – Um comerciante vende dois tipos de artigos, A e B. Na venda do artigo A, tem um lucro de 20 reais por unidade e na venda do artigo B, um lucro de 30 reais. Em seu depósito, só cabem 100 artigos e sabe-se que, por compromissos já assumidos, ele venderá pelo menos 15 artigos do tipo A e 25 do tipo B. O distribuidor pode entregar ao comerciante, no máximo, 60 artigos A e 50 artigos B. Quantos artigos de cada tipo deverá ele encomendar ao distribuidor para que, supondo que os venda todos, obtenha o lucro máximo?

Resolução:

Sejam x o número de artigos do tipo A e y o número de artigos do tipo B que devem ser encomendados.

O lucro total é dado pela função: $L = 20x + 30y$. Observe o enunciado e verifique que essa função está sujeita às restrições: $x + y \leq 100$; $x \geq 15$; $y \geq 25$; $x \leq 60$ e $y \leq 50$. Elas conduzem à seguinte região do plano cartesiano:



A região pentagonal destacada tem vértices de coordenadas (15, 25), (15, 50), <u>(50, 50)</u>, (60, 40) e (60, 25). Nesta ordem, produzem os valores de lucros: 1500, 1800, <u>2500 (valor máximo)</u>, 2400 e 1950, em reais. Daí, o comerciante, para obter lucro máximo, deverá encomendar 50 artigos de cada tipo, com isso conseguindo lucro de 2500 reais.

Problema proposto

Uma firma tem 40 unidades de mercadoria no depósito D_1 e 50 em D_2. Deve enviar 30 ao cliente A e 40 ao cliente B. Os gastos de transporte por unidade estão indicados no esquema a seguir. De que maneira deve enviá-las para que o gasto com transporte seja mínimo?