Conteúdo

COLÉGIO absoluto ANGLO

Edição, ilustrações, seções e artigos não assinados: Calixto Garcia

Revisão: Cármen Silvia P. S. de Lima

Esta edição está composta em *.doc*, fonte *Times New Roman*, corpo *12*

Contatos: – *Colégio Absoluto - Anglo:*
Rua Antonio Nery, 550, Tietê, SP; A/C Prof. Calixto Garcia

– *E-mail - Prof. Calixto Garcia:*
klixg@yahoo.com.br

RMCA

REVISTA DE MATEMÁTICA
DO COLÉGIO ABSOLUTO

02

4º bimestre

2007

COLÉGIO absoluto ANGLO

Ao Leitor

É com grande satisfação que anunciamos o sucesso na Olimpíada de Matemática da Unicamp (OMU), obtido pelos nossos alunos Beatriz S. Rossitti, Luiz Fernando T. Novaes, Mateus Zanetti e Paulo R. Polastri, da 2ª e 3ª séries do Ensino Médio. Parabenizamos o professor *Carrarinho* pelo eficiente trabalho de treinamento, que vem realizando há anos com alunos participantes desse torneio. No dia 6 de outubro, estivemos em Campinas participando da solenidade de entrega de certificados e da confraternização entre professores, diretores, familiares e atletas olímpicos.

Esperamos que o contentamento proporcionado por essa experiência continue contagiando nossos alunos, estimulando-os a tomar parte cada vez mais dessa comunidade.

O professor *Carrarinho* agradece o apoio da direção do Colégio Absoluto, no custeio de provas e viagens, e em possibilitar a implementação das aulas de treinamento.

Chegamos ao segundo número de nossa revista. Por meio de comentários, críticas, sugestões e participação na resolução dos problemas propostos, objetivamos o aprimoramento desse trabalho, visando atender da melhor forma às vontades de nossos leitores.

Uma curiosidade sobre determinado assunto da Matemática, um problema que possa suscitar generalização ou particularização, um método alternativo na resolução de certa situação-problema, entre outras idéias, podem ser objetos de estudo para publicação.

Esta edição é referente ao 4º bimestre de 2007. Lembramos que o próximo número será lançado no início de 2008 e que, a partir de agora, o conteúdo das revistas poderá também ser encontrado no site de nossa escola (*www.colegioabsolutoanglo.com.br*).

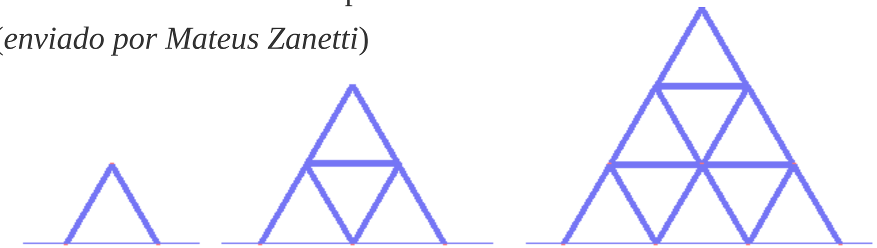
Desejamos uma boa leitura!

Calixto Garcia

Problemas propostos

1 – A seqüência de figuras abaixo mostra as etapas da construção de *castelinhos* de cartas, em que o número de pisos vai aumentando. Quantas cartas são necessárias para a construção de um *castelinho* de cartas com *n* pisos?

(*enviado por Mateus Zanetti*)



2 cartas
1 piso

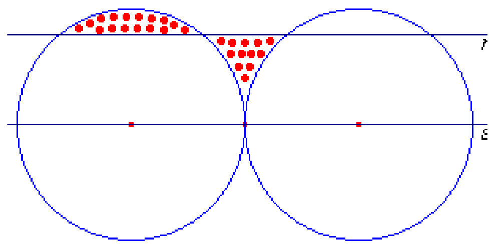
7 cartas
2 pisos

15 cartas
3 pisos

2 – Existem números que têm o último algarismo da direita representando o total de seus dígitos. Por exemplo, o 9074 é um deles (pois o '4' final indica o número de seus dígitos). Você tem idéia de quantos números desse tipo existem?

a) há 45 números assim
b) há infinitos números desse tipo
c) há um milhão de números assim
d) há cem milhões de números desse tipo
e) faltam dados para a solução numérica ser única

3 – (*desafio*) Nesta figura, temos dois círculos tangentes entre si, de raios de medidas iguais a 4 cm. Calcule a distância entre as retas paralelas *r* e *s* de modo que tenham mesma área as duas regiões destacadas.



Problemas

Resolução dos problemas propostos no número anterior

1 – Os triângulos ABC e CDM têm áreas iguais, pois têm bases e alturas iguais. Já que o triângulo CMP é região comum a esses triângulos, segue que a soma das áreas dos ΔAPM e ΔBCM é igual à área do ΔCDP.

2 – Se nenhuma das árvores tem mais de 300 mil folhas em sua copa, o número máximo de árvores que possuem número diferente de folhas é 300.001 (desde a "pelada" até a com 300.000 folhas). Se ali existem um milhão de árvores, existem certamente mais que uma com o mesmo número de folhas. [a]

3 – Este problema foi proposto no livro "Elementos de Álgebra", publicado em 1770, em São Petersburgo, pelo grande matemático Euler.

Vamos resolver esta questão à luz da Física. Para tanto, sejam:

u unidade de tempo; p_c pulo do cachorro; p_l pulo da lebre; V_c velocidade do cachorro; V_l velocidade da lebre.

Das informações coletadas, temos que:

» $V_c = 3\,p_c/\,u$
» $V_l = 4\,p_l/\,u$
» $2\,p_c = 3\,p_l$

Daí $p_l = 2/3\,p_c$ e $V_l = 8/3\,p_c/\,u$
E a distância inicial entre eles é:
$50\,p_l = 50 \,.\, 2/3\,p_c = 100/3\,p_c$

Assim sendo, as equações horárias de seus movimentos são:

» $S_c = V_c.t$ ou $S_c = 3.t$
» $S_l = S_o + V_l.t$ ou
» $S_l = 100/3 + 8/3.t$

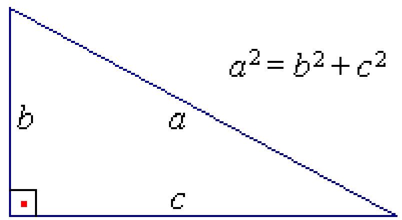
O cachorro a pegará se $S_c = S_l$, isto é, se $3.t = 100/3 + 8/3.t$, ou seja, se $t = 100\,u$.
De $S_c = 3.t$ segue que $S_c = 300\,p_c$

Portanto, para o cachorro pegar a lebre, deve dar 300 pulos.

Ternas Pitagóricas

O triângulo retângulo é importante e encantador aos matemáticos. Seus lados até recebem denominações especiais: a hipotenusa (o maior deles) e os catetos.

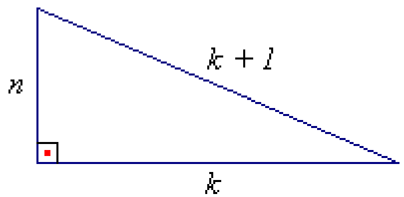
Um resultado muito conhecido, que leva o nome do profeta e místico Pitágoras (600 – 580 a.C., aproximadamente), afirma que o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma do quadrado das medidas dos catetos.



Se as medidas a, b, e c são inteiras e satisfazem o teorema de Pitágoras, então dizemos que esse trio de números constitui uma *terna pitagórica*.

Eis alguns exemplos, onde o maior valor representa a medida da hipotenusa: (3 , 4 , 5) ; (5 , 12 , 13) ; (7 , 24 , 25) ; (8 , 15 , 17). Essas são consideradas ternas primitivas, isto é, formadas por números sem fator comum diferente da unidade. Note, então, que a terna (6 , 8 , 10) deriva da terna (3 , 4 , 5).

Podemos fabricar uma infinidade de ternas pitagóricas em que o maior de seus elementos é o sucessor de um dos outros dois, como podemos observar nos três primeiros exemplos de ternas acima.



Aplicando o teorema de Pitágoras, ficamos com:

$$k^2 + n^2 = (k + 1)^2,$$

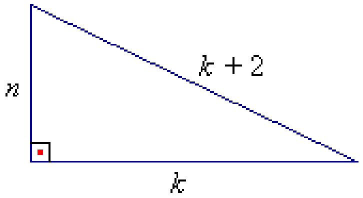
o que acarreta em $n^2 = 2k + 1$.

Isso implica que n^2 é ímpar, ou seja, que n é ímpar.

Assim sendo, se $n = 7$, então $n^2 = 2k + 1 = 49$. Daí, $k = 24$ e $k + 1 = 25$, o que resulta na terna conhecida (7 , 24 , 25). Verifique que, para $n = 9$, fabricamos a terna (9 , 40 , 41).

Obtenha outras desse tipo, atribuindo valores ímpares para *n*.

Para gerar ternas em que a medida da hipotenusa é 2 unidades maior que a medida de um dos catetos, procedemos de maneira semelhante:



Do teorema de Pitágoras:
$k^2 + n^2 = (k + 2)^2$,
o que implica em $n^2 = 4(k + 1)$,
ou seja, em $\left(\frac{n}{2}\right)^2 = k + 1$.

Neste caso, devemos atribuir valores pares para *n*. Note que, para fabricarmos uma terna primitiva, devemos ter *k* ímpar (ou $k + 1$ par), o que significa que *n* deve ser múltiplo de 4.

Assim sendo, se $n = 4$, então, $k = 3$ e $k + 2 = 5$, o que resulta na terna conhecida (3 , 4 , 5). Entre outras que você pode obter, verifique que, para $n = 12$, fabricamos a terna (12 , 35 , 37).

Outra maneira de construir uma fábrica de ternas pitagóricas é escrever as tais medidas em função de uma só. Desse modo, explorando-se o caso de a medida da hipotenusa ser uma unidade maior que a medida de um dos catetos, e expressando-as em função de *n*, obtemos $k = \frac{n^2 - 1}{2}$ e, daí, $k + 1 = \frac{n^2 + 1}{2}$. Portanto, se *n* é um número ímpar maior que 1, as ternas obedecendo a essa condição são do tipo $\left(n, \frac{n^2 - 1}{2}, \frac{n^2 + 1}{2}\right)$.

Obtenha, você, a forma das ternas pitagóricas para o caso de a medida da hipotenusa ser 2 unidades maior que a medida de um dos catetos.

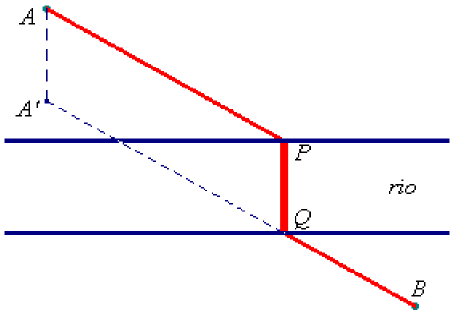
Planejando a construção de estradas e pontes

Estradas e pontes não são baratas. A estrutura diferenciada e a mão de obra especializada as tornam obras dispendiosas. Portanto, o planejamento de suas construções é muito importante.

Um quesito significativo é o comprimento mínimo que devem possuir, especialmente das pontes. E é por isso que a grande maioria delas é ortogonal àquilo que transpõem (rios, estradas, vales etc.).

Digamos que assim deve ser uma ponte que une duas cidades, distantes e separadas por um rio (suponhamos as margens dos rios retilíneas e paralelas), não situadas na mesma direção perpendicular a ele. Em que local construí-la para que a estrada que une essas cidades tenha comprimento mínimo?

Conforme a figura, o ponto A' é obtido de A pela mesma translação que leva perpendicularmente uma margem na outra do rio. O segmento A'B intercepta uma margem do rio em Q.

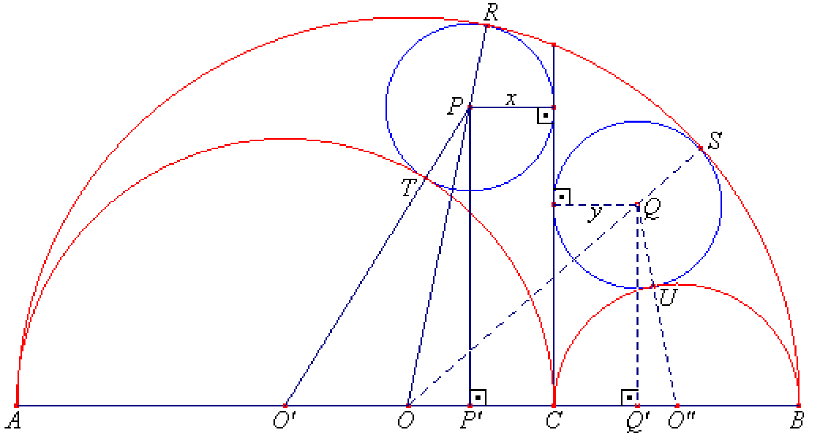


O segmento PQ, perpendicular ao rio, constitui a ponte. O caminho APQB tem o mesmo comprimento de AA'QB. Já que A'QB é um segmento de reta, APQB tem comprimento mínimo.

Que tal trabalhar com 2 rios separando essas cidades?

Referências Bibliográficas

- GARCIA, C. *Vamos construir?* RPM nº 58, SBM, São Paulo, 2005.
- LEDERGERBER-RUOF, E. B. *Isometrias e ornamentos no plano euclidiano*. Atual Editora, São Paulo, 1982.



O leitor que possuir certa habilidade em manipulação algébrica está desafiado a desenvolver e simplificar essa sentença.

Deverá concluir que $x = \dfrac{r_1.r_2}{r_1 + r_2}$.

Procedendo da mesma forma, agora com os triângulos *OQ'Q* e *O"Q'Q*, verificamos que têm lados com medidas $OQ = r_1 + r_2 - y$; $QO" = r_2 + y$; $Q'O" = r_2 - y$ e $OQ' = OC + y = CO' - OO' + y$, ou seja, $OQ' = r_1 - r_2 + y$.

O teorema de Pitágoras aplicado a esses triângulos resulta em: $(Q'Q)^2 = (r_1 + r_2 - y)^2 - (r_1 - r_2 + y)^2 = (r_2 + y)^2 - (r_2 - y)^2$, conduzindo a $y = \dfrac{r_1.r_2}{r_1 + r_2}$, ou seja, à mesma medida *x* do raio da outra circunferência, como queríamos demonstrar.

Referências Bibliográficas

- BOYER, C. B. *História da Matemática*. Edgard Blücher, São Paulo, 1996.
- DALCIN, M. *Circunferências gêmeas de Arquimedes*. RPM nº 54, SBM, São Paulo, 2004.

Desconto por compra à vista

Em tempo de inflação alta, dinheiro sob o colchão é certeza de prejuízo. O recomendável é aplicá-lo em uma instituição financeira, ou utilizá-lo na aquisição de um bem. Neste último caso, se a compra é feita à vista, é usual negociarmos esse valor, ainda que o preço nessa modalidade de pagamento esteja anunciado.

O objetivo desse artigo é obter, por meios matemáticos, uma fórmula que nos dê o percentual de desconto que devemos exigir quando efetuamos uma compra à vista.

Digamos, por exemplo, que a taxa mensal a qual conseguimos investir nosso capital seja de 5 %. Um valor de 800 reais, se aplicado a essa taxa, após um mês, passará a $800 \cdot 1{,}05 = 840$ reais. No mês seguinte, $840 \cdot 1{,}05 = 882$ reais, e assim por diante.

Por outro lado, podemos dizer que, hoje, o valor de 441 reais tem o mesmo valor de $\dfrac{441}{1{,}05} = 420$ reais daqui a um mês, $\dfrac{441}{1{,}05^2} = 400$ reais daqui a 2 meses, e assim por diante.

Para a situação que se segue, consideremos ser de 2 % a tal taxa mensal. Suponhamos que queremos comprar um produto oferecido pelo *preço de tabela* de 1000 reais ou em 5 vezes sem juros (supondo as prestações iguais e a primeira prestação paga no ato da compra). Assim sendo, pagamos agora 200 reais, 200 reais daqui a 1 mês, 200 reais daqui a 2 meses, e assim por diante, até a 5ª parcela. Isso equivale a desembolsar na data atual:

$$200 + \frac{200}{1{,}02} + \frac{200}{1{,}02^2} + \frac{200}{1{,}02^3} + \frac{200}{1{,}02^4} \approx 961 \text{ reais.}$$

Este valor é cerca de 4 % menor que o preço tabelado. Portanto, se desejamos adquiri-lo à vista, devemos exigir um desconto de pelo menos esse percentual.

Calculemos, para o caso geral, o desconto mínimo de taxa d que devemos requerer, no momento da compra à vista de um produto, oferecido pelo preço de tabela V, ou em n parcelas iguais a P (a primeira paga no ato da compra), sem juros.

O pagamento parcelado, com base na data atual, é equivalente ao desembolso de:

$$P+\frac{P}{1+i}+\frac{P}{(1+i)^2}+\,.\,.\,.+\frac{P}{(1+i)^{n-1}}=P\cdot\frac{\left(\frac{1}{1+i}\right)^n-1}{\frac{1}{1+i}-1}=P\cdot\frac{(1+i)^n-1}{i\cdot(1+i)^{n-1}}$$

Note que a soma acima é de uma progressão geométrica de primeiro termo P e razão $\frac{1}{1+i}$. Após sofrer o referido desconto d, o preço de tabela $V = n.P$, transforma-se em $n.P(1 - d)$ e, este, deve ser o valor dessa soma. Assim sendo, de:

$$n.P(1-d)=P\cdot\frac{(1+i)^n-1}{i\cdot(1+i)^{n-1}}\text{, temos que } \boxed{d=1-\frac{(1+i)^n-1}{n\cdot i\cdot(1+i)^{n-1}}}\,.$$

Por exemplo, para uma taxa mínima de atratividade $i = 1{,}5$ % (como é tecnicamente chamada), se uma mercadoria lhe for oferecida em 6 vezes, o desconto mínimo que você deve pleitear é de 3,6 %.

Observações:

– Fica mais prático o cálculo da taxa d, com o uso de uma calculadora científica.

– Note que o valor de d independe do valor da compra.

– Uma prática de preços atipicamente majorados pode sugerir intenção de impressionar o comprador pela magnitude do desconto.

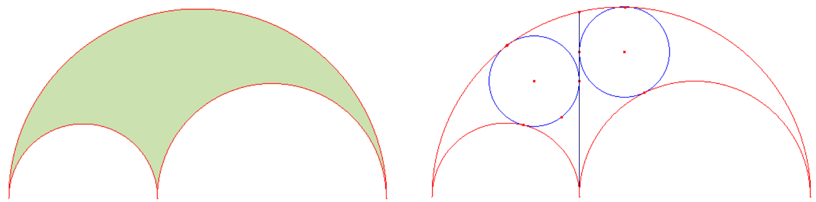
Referência Bibliográfica

- GARCIA, C. *À vista com desconto ou a prazo sem juros?* RPM nº 20, SBM, São Paulo, 1992.

Sobre o logotipo da revista

O grande siracusano Arquimedes (287 – 212 a.C.) lidava com matemática avançada. Algumas vezes, tratava de temas elementares, como encontrados no *Livro dos Lemas*, obra que contém 15 proposições de Geometria.

Uma delas estudava uma figura geométrica plana com a forma de uma faca de sapateiro, denominada *arbelo*, em que se observam três semicircunferências, como ilustrado na primeira figura a seguir:



Dividindo-se o *arbelo* com um segmento perpendicular à reta que passa por seus “pontos angulosos”, conforme mostra a segunda figura acima, criamos duas regiões, em cada qual podemos inscrever uma circunferência. Entre outros resultados desse estudo, Arquimedes provou que ambas possuem o mesmo raio.

Convidamos o leitor, sobretudo aquele que aprecia a Geometria e a Álgebra, a acompanhar os passos desta demonstração, observando atentamente a figura que segue.

Sendo os raios $AO' = r_1$ e $BO'' = r_2$, e O o ponto médio de AB, veja que $AO = r_1 + r_2$ e que, por isso, $OO' = r_2$.

Temos também que $OP' = CO' – OO' – CP' = r_1 – r_2 – x$, que $OP = r_1 + r_2 – x$, que $PO' = r_1 + x$ e, finalmente, que $O'P' = r_1 – x$.

Aplicando-se o teorema de Pitágoras aos triângulos $O'P'P$ e $OP'P$, obtemos $(P'P)^2 = (OP)^2 – (OP')^2 = (PO')^2 – (O'P')^2$, isto é:

$$(r_1 + r_2 – x)^2 – (r_1 – r_2 – x)^2 = (r_1 + x)^2 – (r_1 – x)^2$$