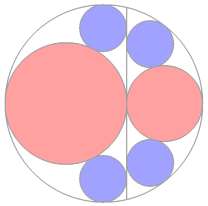
Conteúdo



COLÉGIO absoluto ANGLO

Edição, ilustrações, seções e artigos não assinados: Calixto Garcia

Revisão: Carmem Silvia P. S. de Lima

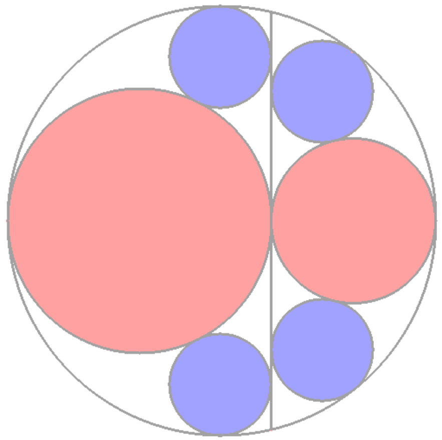
Esta edição está composta em *.doc*, fonte *Times New Roman*, corpo 12

Contatos: – *Colégio Absoluto - Anglo:*
Rua Antonio Nery, 550, Tietê, SP; A/C Prof. Calixto Garcia

– *E-mail - Prof. Calixto Garcia:*
klixg@yahoo.com.br

RMCA

REVISTA DE MATEMÁTICA
DO COLÉGIO ABSOLUTO



03

1º bimestre

2008

COLÉGIO absoluto ANGLO

Ao Leitor

A equipe pedagógica e administrativa desta escola deseja a todos um ano escolar muito promissor.

A cada ano que passa, buscamos oferecer um ensino de Matemática mais aprimorado, que possa, além de auxiliá-los em futuros processos seletivos, contribuir com a formação de cidadãos competentes nessa área, cada vez mais exigidos no mercado de trabalho.

Nesta revista abordamos dois dos mais importantes e interessantes números da Matemática: e e π. Garimpamos fatos históricos e procuramos materializar a essência dos conceitos envolvidos com esses números.

Apresentamos o teorema do matemático Ceva, pouco conhecido dos currículos do ensino médio, porém relevante na aplicação em diversas situações da Geometria.

Veja também como a Geometria mostra sua importância em uma partilha de terrenos. Sugerimos como pode ser concretizada com conhecimentos de construções geométricas.

Boa leitura!

Calixto Garcia

O teorema de Ceva

A História da Matemática coleciona inúmeros resultados envolvendo triângulos. Um deles se deve ao matemático italiano Giovanni Ceva (1648 – 1734), que viveu numa época em que poucos estudiosos dessa Ciência destacaram-se em seu país.

Problemas propostos

1 – Três amigos – Aline, Beto e Carlos – foram jogar boliche. Combinaram que, ao final de cada partida, o vencedor ganharia, de cada um de seus oponentes, a quantia que ele possuía. Aline venceu a primeira; Beto, a segunda; e Carlos, a terceira partida. Ao final, todos possuíam R$ 27,00 cada um.

A tabela ao lado está ilustrando essa situação.

Quanto cada um possuía (x, y e z) no início desse pequeno campeonato?

INÍCIO	x	y	z
partida	Aline	Beto	Carlos
1°	venceu		
2°		venceu	
3°			venceu
R$	27,00	27,00	27,00

2 – Considere a circunferência de maior raio inscrita em uma semicircunferência de raio 40 cm. Qual é o raio da maior circunferência interior a essa semicircunferência e exterior à referida circunferência?

3 – (*desafio*) Seja um triângulo ABC isósceles. Com diâmetro em sua base BC, seja uma semicircunferência de centro F nele inscrita. Por um ponto desta semicircunferência, traça-se uma reta tangente que intercepta os lados AB e AC em D e E, nessa ordem. Demonstre que CEF, BDF e DEF são triângulos semelhantes.

→ *Resposta do problema proposto na página 3:* a área total é 315.

Curiosidades sobre π

♦ Euler provou que a soma dos inversos dos quadrados de todos os números naturais é igual a $\pi^2/6$. Essa fração é o inverso da probabilidade de escolhermos dois números naturais primos entre si.

A área da região compreendida entre o eixo das abscissas e o gráfico da função $y = e^{-x^2}$ é igual à $\sqrt{\pi}$.

Problemas

Resolução dos problemas propostos no número anterior

1 – Observe que, por exemplo, para um *castelinho* de 4 pisos, são necessárias 3 + (3 + 3) + (3 + 3 + 3) + (3 + 3 + 3 + 3 – 4) cartas, cuja parcela destacada representa o número de cartas de cada piso, de cima para baixo. Reescrevendo essa soma: $3{\cdot}1 + 3{\cdot}2 + 3{\cdot}3 + 3{\cdot}4 - 4$, ou, $3{\cdot}(1 + 2 + 3 + 4) - 4$. Essa última forma de exprimir o número de cartas de um *castelinho* de 4 pisos leva-nos a generalizar: para um *castelinho* com n pisos, precisamos de $3{\cdot}(1 + 2 + \ldots + n) - n$ cartas. Notando que $1 + 2 + \ldots + n = n{\cdot}(n + 1) / 2$, e desenvolvendo aquela expressão, ficamos com: $\dfrac{n \cdot (3n+1)}{2}$ cartas.

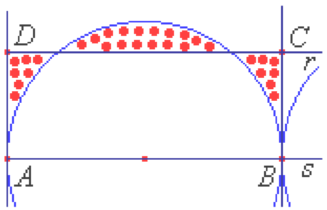
2 – Para números de um algarismo, com essa propriedade, temos somente o número 1. Para números de 2 algarismos, temos os números 12, 32, 42, . . . , 92, ou seja, 9 números, obtidos assim pelo princípio multiplicativo: $\underline{9} \cdot \underline{1} = 9$. Para números de 3 algarismos, a quantidade é assim calculada: $\underline{9} \cdot \underline{10} \cdot \underline{1} = 90$, e assim por diante, até para os números de 9 algarismos, cujo total é:

$$\underline{9} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{1} = 90.000.000.$$

A soma dessas quantidades é o resultado esperado, a saber:

$$1 + 9 + 90 + 900 + \ldots + 9.000.000 + 90.000.000 = 100.000.000 \quad \text{(d)}$$

3 – Devido à simetria da figura, as áreas destacadas abaixo da reta r são iguais. A soma dessas áreas será igual à área destacada acima da reta r quando a área do retângulo *ABCD* for igual à área do semicírculo de diâmetro *AB*. Desse modo:

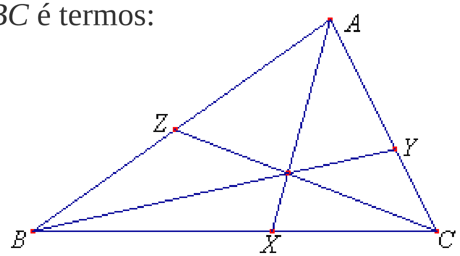


sendo h a distância entre r e s, $2 \cdot 4 \cdot h = \pi \cdot 4^2 / 2$, de onde $h = \pi$ cm.

Em deferência por seus estudos em Geometria, atribuímos o nome *ceviana* a qualquer segmento que tem uma extremidade num vértice de um triângulo, e outra, no lado oposto a esse vértice.

Ceva, em 1678, publicou uma proposição de Menelaus (cerca de 100 a.C.) e, nela se inspirando, enunciou o seguinte teorema: uma condição necessária e suficiente para serem concorrentes a cevianas *AX*, *BY* e *CZ* de um triângulo *ABC* é termos:

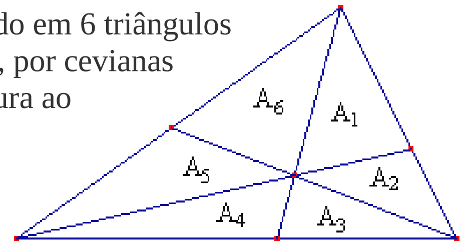
$$\frac{AY \cdot CX \cdot BZ}{CY \cdot BX \cdot AZ} = 1$$



Provaremos aqui a condição necessária do teorema de Ceva, tomando como base uma versão envolvendo áreas, assim enunciada:

Seja um triângulo dividido em 6 triângulos de áreas A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 e A_6, por cevianas concorrentes, como ilustra a figura ao lado. Então temos que:

$$\frac{A_1 \cdot A_3 \cdot A_5}{A_2 \cdot A_4 \cdot A_6} = 1$$

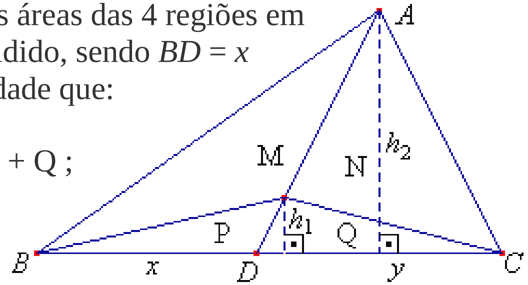


Antes de provarmos esse resultado, observemos o seguinte:

Sendo M, N, P e Q as áreas das 4 regiões em que o triângulo dado foi dividido, sendo $BD = x$ e sendo $DC = y$, então é verdade que:

$$\frac{x \cdot h_2}{2} = \mathrm{M} + \mathrm{P}\,; \quad \frac{y \cdot h_2}{2} = \mathrm{N} + \mathrm{Q}\,;$$

$$\frac{x \cdot h_1}{2} = \mathrm{P} \;\; \text{e} \;\; \frac{y \cdot h_1}{2} = \mathrm{Q}.$$



Do quociente entre as 2 primeiras e as 2 últimas igualdades:

$$\frac{x}{y}=\frac{P}{Q}=\frac{M+P}{N+Q}\text{, acarretando em }\frac{M}{P}=\frac{N}{Q}.$$

Assim, para o triângulo que foi dividido em 6 partes, temos:

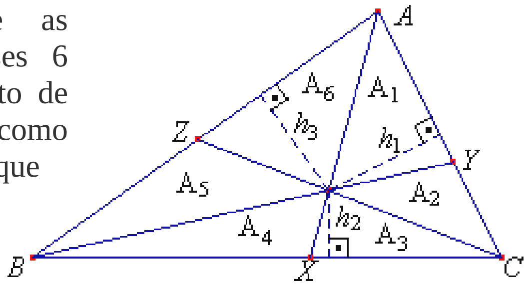
$$\frac{A_1+A_2}{A_3}=\frac{A_5+A_6}{A_4}\ ;\ \frac{A_1+A_2}{A_6}=\frac{A_3+A_4}{A_5};\ \frac{A_3+A_4}{A_2}=\frac{A_5+A_6}{A_1}.$$

Das 2 primeiras igualdades, temos que:

$$A_1+A_2=\frac{A_3}{A_4}(A_5+A_6)=\frac{A_6}{A_5}(A_3+A_4)\text{. Daí: }\frac{A_3+A_4}{A_5+A_6}=\frac{A_3\cdot A_5}{A_4\cdot A_6}.$$

Combinando esta última com a terceira igualdade, ficamos com: $\dfrac{A_3\cdot A_5}{A_4\cdot A_6}=\dfrac{A_2}{A_1}$, ou seja, com $\dfrac{A_1\cdot A_3\cdot A_5}{A_2\cdot A_4\cdot A_6}=1$.

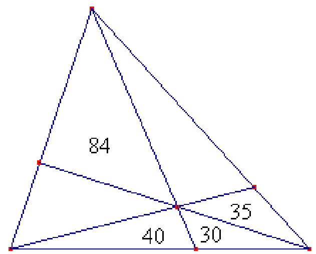
Agora, traçando-se as alturas de cada um desses 6 triângulos, a partir do ponto de encontro das cevianas, como indicado na figura, teremos que $\dfrac{A_1\cdot A_3\cdot A_5}{A_2\cdot A_4\cdot A_6}=1$ implica:



$$\frac{\dfrac{AY.h_1}{2}\cdot\dfrac{CX.h_2}{2}\cdot\dfrac{BZ.h_3}{2}}{\dfrac{CY.h_1}{2}\cdot\dfrac{BX.h_2}{2}\cdot\dfrac{AZ.h_3}{2}}=1\text{, ou seja, }\frac{AY\cdot CX\cdot BZ}{CY\cdot BX\cdot AZ}=1.\qquad\text{(c.q.d.)}$$

Convidamos o leitor a resolver a seguinte questão, proposta num concurso do Instituto Militar de Engenharia: *Na figura, os números indicam as áreas dos triângulos parciais. Qual a área total?*

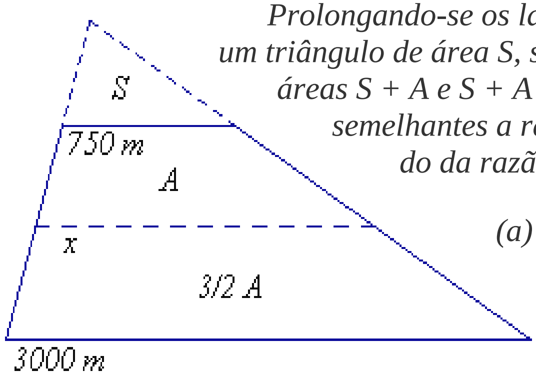
[resposta na página 10]



Dividindo terrenos

Um fazendeiro possui uma porção de terra da forma de um trapézio, cujas divisas paralelas medem 750 m e 3 km. Ele deseja dividi-la em duas partes com uma cerca na direção dessas divisas, em regiões com áreas proporcionais às idades de seus dois filhos, que são de 24 e 36 anos. Cada um ficará com uma parte do terreno, sendo que ao caçula cabe a parte com a divisa de medida menor. Nessas condições, qual deve ser a medida dessa cerca?

Ficando o caçula com a região de área A, o mais velho deve ficar com a de área 36/24 A, ou 3/2 A, como ilustra a figura a seguir:

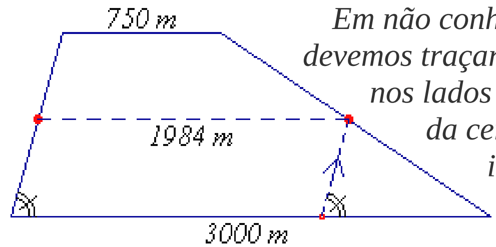


Prolongando-se os lados não paralelos, obtém-se um triângulo de área S, semelhante aos triângulos de áreas S + A e S + A + 3/2 A. Como entre figuras semelhantes a razão entre áreas é o quadrado da razão de semelhança, segue que:

$$(a)\ \frac{S+5/2\,A}{S}=\left(\frac{3000}{750}\right)^2\ e$$

$$(b)\ \frac{S+A}{S}=\left(\frac{x}{750}\right)^2.$$

De (a), $\dfrac{A}{S}=6$, *e de (b),* $\dfrac{A}{S}=\left(\dfrac{x}{750}\right)^2-1$. *Comparando-as, obtém-se* $x=750\cdot\sqrt{7}\cong 1984$ *m.*



Em não conhecendo a área total do terreno, devemos traçar uma estratégia de como obter, nos lados não paralelos, as extremidades da cerca a ser construída. Observe a ilustração ao lado. Ela pode sugerir uma idéia...

O valor de π com a precisão de uma calculadora de 8 dígitos foi conseguida pelos chineses já nos primeiros séculos depois de Cristo nascer. No século quinze, o árabe Al-Kashi calculou π com o dobro desse número de dígitos.

A primeira expressão exata, em função da qual exprimimos π, é devida ao francês François Viète (1540 – 1603):

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots$$

Entre outras desse tipo, há também: $\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$

A prova de que π é irracional, ou seja, de não poder ser escrito como quociente de inteiros, apenas ocorreu em 1761, apresentada pelo matemático alemão Lambert (em 1737, Euler havia mostrado que e é irracional).

Em 1882, o matemático Lindeman, de Munique, provou que π também é transcendental, isto é, que não pode ser raiz de uma equação polinomial com coeficientes inteiros. Isso quer dizer que π não pode ser expresso por radicais quadráticos.

Essa conclusão pôs fim à discussão sobre um dos problemas clássicos da antigüidade: o da quadratura do círculo, isto é, da construção, com ferramentas euclidianas (compasso e régua não graduada), de um quadrado com mesma área de um círculo dado.

Na era da informática, os matemáticos vêm desenvolvendo expressões exatas que convergem para π de maneira cada vez mais veloz, permitindo seu cálculo em menor tempo e com mais casas decimais, atualmente, na ordem de 5 trilhões.

Referência Bibliográfica

- BOYER, C. B. *História da Matemática*. Edgard Blücher, São Paulo, 1996.

O número *e*

Introdução

As Ciências em geral têm a Matemática como sua principal ferramenta. Sua utilidade, por exemplo, está no estudo de variações de grandezas. Uma espécie de variação usual é aquela cujo aumento (ou decréscimo) de uma grandeza, em cada instante, é proporcional ao valor dessa grandeza naquele instante. Esse comportamento de tal variação ocorre, por exemplo, com juros compostos, crescimento populacional, desintegração radioativa etc. São em fenômenos dessa natureza que o número e está envolvido.

Esse número surgiu com os estudos de um escritor escocês, dono de grandes propriedades, chamado John Napier (1550 – 1617). Na Matemática, interessou-se por computação e trigonometria. Procurando uma técnica que facilitasse a multiplicação de senos, acabou criando os logaritmos de base e^{-1}, que ficaram conhecidos por *logaritmos neperianos*.

Materializando idéias

O número de Neper, ou de Napier, como e ficou chamado, aparece de modo mais acessível na seguinte situação interessante:

Suponhamos que eu empreste a alguém a quantia de 1 real, a juros de 100% ao ano. Seria correto dizer que, no final do ano, receberia dessa pessoa 2 reais? A resposta a essa questão, acredite, negativa, pode ser justificada pelo seguinte raciocínio:

Suponhamos que ela viesse me pagar seis meses depois do empréstimo. Dessa forma, eu receberia apenas 1,5 real, uma vez que os juros são proporcionais ao tempo decorrido entre tal empréstimo e o pagamento. E isso quer dizer que, após seis meses, esta pessoa estaria com 1,5 real meu e ficaria com esse dinheiro por mais seis meses, à mesma taxa anual.

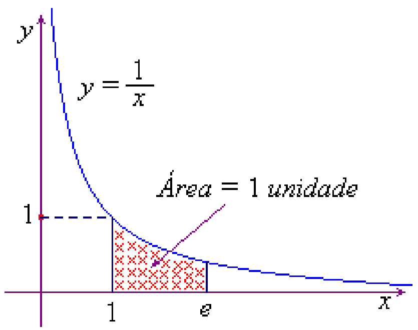
Logo, deveria me pagar, ao final de um ano, a quantia de $1{,}5 + 0{,}5.1{,}5 = 1{,}5 \cdot 1{,}5 = 1{,}5^2 = 2{,}25$ reais.

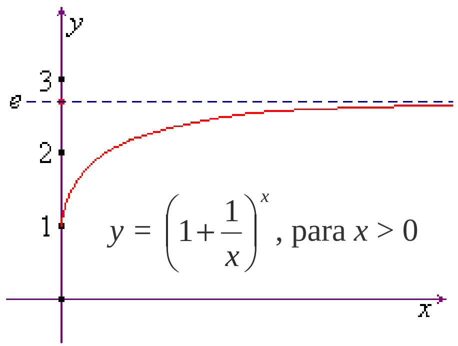
Valendo-se desse mesmo raciocínio, dividindo-se o ano em n partes iguais, decorrido o primeiro período de 1 ano/n, meu capital emprestado, a 100% ao ano, estaria valendo $(1 + 1/n)$ reais. No final do segundo período, estaria valendo $(1 + 1/n)^2$ reais, e assim por diante. No final de um ano, eu deveria receber $(1 + 1/n)^n$ reais.

E esse número n de partes pode ser tão grande quanto quisermos. Se calculado com n suficientemente grande, chegamos a cerca de 2,72 reais. Para n tendendo ao infinito, o número resultante é denominado e, comprovadamente irracional e matematicamente assim escrito: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \cong 2{,}718281828459045235360287 47$.

Devido à sua aplicação a fenômenos da natureza, o logaritmo com tal base foi batizado de *logaritmo natural*, representado por ln.

Significados gráficos



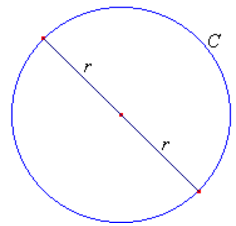


Referências Bibliográficas

- LIMA, E. L. *Conceitos e controvérsias*. RPM nº 02, SBM, São Paulo, 1983.
- BOYER, C. B. *História da Matemática*. Edgard Blücher, São Paulo, 1996.

O número π

Há uma relação de proporcionalidade entre o diâmetro e o comprimento de circunferências. Com um pedaço de barbante de medida 22 cm, é possível construir uma circunferência com diâmetro medindo cerca de 7 cm. Já com 44 cm, a circunferência que se obtém possui diâmetro com o dobro da medida do anterior. A constante de proporcionalidade, resultado da razão entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro, ficou conhecida por π.



$$\pi = \frac{C}{2.r} \cong \frac{22}{7} = \frac{44}{14} \cong 3{,}14. \quad (\text{daí: } C = 2.\pi.r)$$

Mais precisamente, $\pi \cong 3{,}14159265358979323 85$.

Esse número não aparecia explicitamente na Matemática antiga, e sim, em meio a estimativas envolvendo área de círculo e comprimento de circunferência.

Num dos problemas existentes num papiro egípcio, copiado pelo escriba Ahmes ($\pm$ 1650 a.C.), o qual continha informações que remontam de até 5000 a.C., assume-se a área de um círculo de diâmetro 9 unidades, sendo equivalente à área de um quadrado de lado 8 unidades. Isso significa atribuir a π o valor $(16/9)^2 \cong 3{,}16$, uma aproximação relativamente boa para os propósitos da época.

Tabletas babilônicas igualmente antigas foram encontradas no século passado, fornecendo, dentre muitas informações, também indiretamente o valor atribuído a π, com precisão semelhante a dos egípcios.

Quase 3 séculos anteriores à era cristã, Arquimedes, trabalhando com polígonos regulares, obteve para π aproximação ainda melhor, expressa pela desigualdade: $310/71 < \pi < 310/70$.