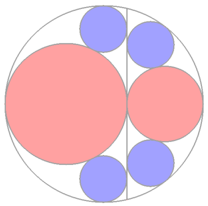
Conteúdo



Edição, ilustrações, seções e artigos não assinados: Calixto Garcia

Revisão: Carmem Silvia P. S. de Lima

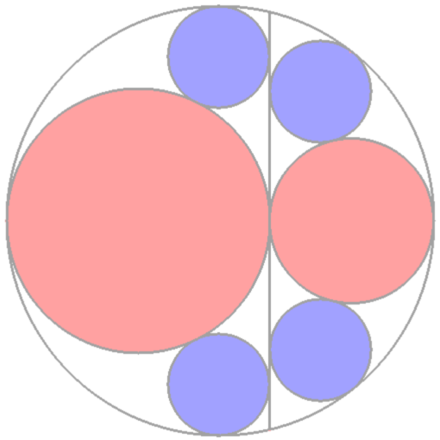
Esta edição está composta em *.doc*, fonte *Times New Roman*, corpo 12

Contatos: – *Colégio Absoluto - Anglo:*
Rua Antonio Nery, 550, Tietê, SP; A/C Prof. Calixto Garcia

– *E-mail - Prof. Calixto Garcia:*
klixg@yahoo.com.br

RMCA

REVISTA DE MATEMÁTICA
DO COLÉGIO ABSOLUTO



04

2º bimestre

2008

Ao Leitor

Como pode perceber o caro leitor, esta revista não tem, em geral, seu conteúdo tratado de modo superficial, embora esteja ao alcance de um aluno de Ensino Médio, especialmente daquele que aprecia a Matemática. Com freqüência, os artigos remetem à reflexão, exigem o uso do raciocínio, da lógica, provocam questionamentos, propõem problemas, entre outras capacidades exploradas. Tal concepção se deve principalmente ao contraste entre sua periodicidade e seu porte. Para tanto, faz-se necessário imprimir--lhe a devida profundidade em seus artigos.

Nesta edição, mostramos como se constrói um simulador de complementação de renda. Apresentamos a seqüência de Fibonacci, o número de ouro e alguns bons motivos para assim chamá-lo. Por fim, esclarecemos sobre os objetivos da adoção do *horário de verão*.

Boa leitura!

Calixto Garcia

A matemática do plano de previdência

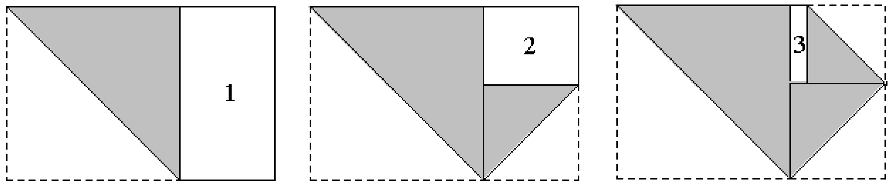
Os trabalhadores assalariados têm parte de seus ganhos destinada a um fundo: a *previdência social*. Ela é que nos garante a renda na aposentadoria. Em geral, essa renda é menor que o salário que recebemos e insuficiente para custear os gastos na terceira idade.

Um dos meios de complementar essa renda é a realização de um plano privado de previdência, valendo-se de uma instituição financeira. Esse plano consiste em uma aplicação periódica de um capital por um tempo pré-determinado, findo o qual, o investidor efetua o resgate total ou em parcelas, recebidas durante um período, ou até o fim de sua vida, conforme o tipo de plano contratado.

Problemas propostos

1 – Obter a expressão exata para o co-seno de 72° (sugestão: ver o segundo artigo desta revista)

2 – (*Olimpíadas de Maio*) Uma folha de papel retangular (branca de um lado e cinza de outro) foi dobrada 3 vezes, como mostra a figura abaixo:



O retângulo 1, que ficou da cor branca após a primeira dobra, tem 20 cm a mais de perímetro que o retângulo 2, que ficou branco após a segunda dobra, e este, por sua vez, tem 16 cm a mais de perímetro que o retângulo 3, que ficou branco após a terceira dobra. Determine a área da folha.

3 – (*desafio*) Resolver a equação $x^2 + \sqrt{x} - 18 = 0$.

Sobre o número áureo e seu inverso

É realmente interessante o que ocorre com o número áureo λ e seu inverso, como apresentado no final do artigo de que dele trata.

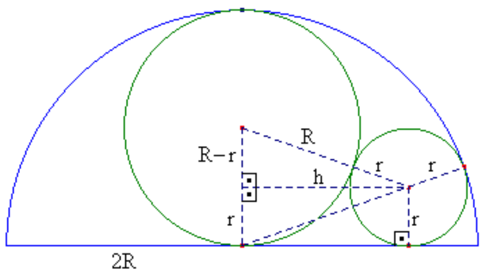
Veja que, entre $\lambda = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ e $\dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{2}{\sqrt{5}-1} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$, a diferença é 1, de onde se conclui conterem a mesma parte decimal. Esse fato acontece naturalmente com irracionais que possuem diferença inteira com seu inverso. Verifique que ocorre também com todo número da forma $\sqrt{a^2+1}-a$, com a inteiro não nulo.

Problemas

Resolução dos problemas propostos no número anterior

1 – Se os três amigos tinham 27 reais ao final da 3ª partida, é porque ao final da 2ª partida, antes de Carlos vencer, tinham A = B = 36 reais e C = 27/3 = 9 reais. Beto havia ficado com 36 reais até então, pois venceu a 2ª partida, tendo recebido de cada um de seus amigos 36/3 = 12 reais. Portanto, tinham antes da 2ª partida A = 48 reais, B = 12 reais e C = 21 reais. Se A venceu a 1ª partida, é porque tinha, antes disso, 48/3 = 16 reais, quantia esta que recebeu de cada um de seus amigos, os quais tinham por sua vez B = 28 reais e C = 37 reais.

2 – Observe a generalização desta situação na figura abaixo:



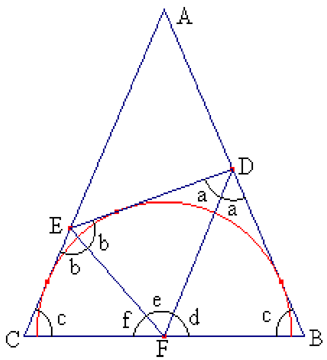
Dos triângulos de cateto h:

$h^2 = (R + r)^2 - (R - r)^2$ e

$h^2 = (2R - r)^2 - r^2$,

de onde se conclui que R = 2r. Pelos dados dessa questão, temos que r = 10 cm.

3 – Como EC e ED são tangentes à semicircunferência, EF bissecta DÊC, definindo ângulos de medidas iguais a b. Analogamente são definidos os ângulos indicados por a. Isso posto, do quadrilátero BCED, temos que 2a + 2b + 2c = 360°, ou que a + b + c = 180°. Portanto , e = c ; f = a e d = b , resultando semelhantes os triângulos CEF, BDF e DEF, já que todos têm os mesmos ângulos internos.



Há custos que a instituição financeira cobra para administrar os recursos sobre o saldo investido. Além da correção monetária, que assegura o poder aquisitivo da moeda, é normalmente acrescida a *taxa real de juros*. Para a *caderneta de poupança*, ela vale 0,5 %.

Antes de conhecermos a matemática desse plano, recordemos dois fatos: a) um valor V, acrescido do percentual i, transforma-se em $V + V\cdot i$, ou seja, em $V\cdot(1 + i)$; b) a soma das n parcelas da progressão geométrica $[1, x, x^2, \dots, x^{n-1}]$ é igual a $(x^n - 1)/(x - 1)$.

A partir de um valor inicial A, uma contribuição mensal C, em n meses, à taxa líquida mensal i, gera o montante M assim calculado:

→ saldo ao final do 1º mês: $C + A(1 + i)$

→ saldo ao final do 2º mês: $C + [C + A(1 + i)](1 + i) =$
$= C + C(1 + i) + A(1 + i)^2 = C[1 + (1 + i)] + A(1 + i)^2$

→ saldo ao final do 3º mês: $C + [C + C(1 + i) + A(1 + i)^2](1 + i) =$
$= C[1 + (1 + i) + (1 + i)^2] + A(1 + i)^3$

→ saldo em n meses: $C[1 + (1 + i) + \dots + (1 + i)^{n-1}] + A(1 + i)^n$

$$\text{Daí: } M = C\cdot\frac{(1+i)^n - 1}{i} + A(1+i)^n . \qquad [*]$$

Esse é o montante utilizado na geração de renda. Para tanto, dele é realizada uma série de p retiradas mensais, cada qual de valor R, cujo saldo é corrigido mensalmente à taxa i, de modo que, após a última retirada, essa quantia se esgota. Matematicamente se tem:

→ saldo ao final do 1º mês: $M(1 + i) - R$

→ saldo ao final do 2º mês: $[M(1 + i) - R](1 + i) - R =$
$= M(1 + i)^2 - R(1 + i) - R$

→ saldo ao final do 3º mês: $[M(1 + i)^2 - R(1 + i) - R](1 + i) - R =$
$= M(1 + i)^3 - R(1 + i)^2 - R(1 + i) - R$

→ saldo em p meses: $M(1 + i)^p - R[1 + (1 + i) + \dots + (1 + i)^{p-1}] = 0$

Daí: $M(1+i)^p = R\cdot\dfrac{(1+i)^p-1}{i}$, ou $M = R\cdot\dfrac{(1+i)^p-1}{(1+i)^p\cdot i}$. [∗∗]

No caso de o número de retiradas ser infinito, isto é, no caso de renda vitalícia, fazemos $p\to\infty$, obtendo-se: $M = R/i$. [∗∗∗]

Exemplos:

1) Dispondo, no início, de 5.000 reais, se contribuirmos mensalmente com 300 reais por 20 anos, sob taxa real de juros de 0,6 % ao mês, reuniremos um montante de 181.141,57 reais, obtido da fórmula [∗]. Dele, conseguiremos uma renda mensal de 1.303,47 reais, por mais 25 anos, calculado pela fórmula [∗∗], ou uma renda perpétua de 1.086,85 reais (da fórmula [∗∗∗]).

2) Se desejarmos obter uma renda mensal de 1.200 reais durante 15 anos, devemos capitalizar, àquela mesma taxa, um montante de 131.861,36 reais, dado pela fórmula [∗∗]. E isso pode ser conseguido, sem capital inicial, por meio de contribuições mensais de 753,48 reais durante 10 anos, valor este obtido de [∗].

Realize, você, outras simulações. Os cálculos efetuados com base nessas fórmulas ganham agilidade com a utilização de calculadora científica. Há calculadoras, dedicadas à Matemática Financeira, que possuem, nelas embutidas, fórmulas prontas (as chamadas *macros*) e resolvem rapidamente situações como essas. Certos programas de computador contam também com elas.

O quadro ao lado mostra valores de contribuições ao mês (em reais), para um plano que gera a renda vitalícia de 1.000 reais mensais. (para i = 0,6 % a.m.)

Idade de Ingresso \ *Idade de Concessão do Benefício*	50	55	60	65
30	312,25	199,31	131,31	88,22
35	516,74	312,25	199,31	131,31
40	952,36	516,74	312,25	199,31
45	2.315,95	952,36	516,74	312,25
50		2.315,95	952,36	516,74

Horário de verão

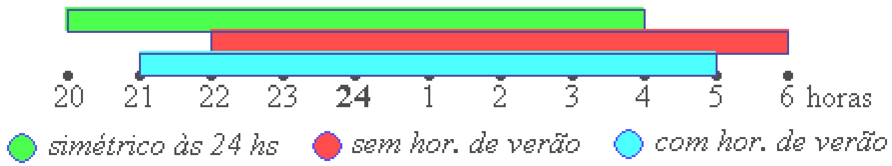
No verão, certos países ou porções deles, especialmente aquelas mais afastadas da linha do equador, alteram ligeiramente o horário de seus relógios, praticando o então chamado *horário de verão*, cuja finalidade é apresentada neste texto.

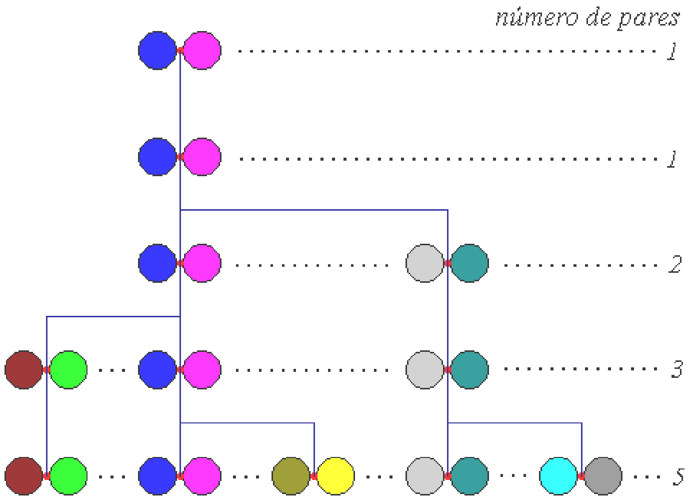
Sua criação remonta ao início do século passado, na Europa. Atualmente, cerca de 30 países o adotam, sendo o Brasil, devido à sua extensão em latitude, o único país equatorial a praticá-lo.

O hábito da maioria de nós é de ter em média 8 horas de sono, que usualmente se inicia às 22 horas, terminando às 6 horas da manhã. Esse período não corresponde ao mais escuro da noite, sobretudo no verão, em que temos dias mais longos quando longe do equador. O período de 8 horas mais escuro é o simétrico em relação à meia noite, sendo, portanto, compreendido entre 20 horas e 4 horas da madrugada. E é justamente o que os animais (irracionais) que dormem à noite adotam para dormir, por instinto.

Quando adiantamos o relógio em uma hora, o nosso período de sono muda para a faixa de tempo compreendida entre 21 horas e 5 horas da madrugada, ficando mais próximo do período mais escuro da noite. Como conseqüência, dormimos por mais tempo nas horas mais escuras dos dias, economizando energia elétrica (iluminação). Essa mudança também contribui para a discordância entre o horário de chegada das pessoas do trabalho e o acionamento da iluminação pública, colaborando para o aumento mais gradativo da demanda de energia e favorecendo a segurança nas centrais do sistema elétrico.

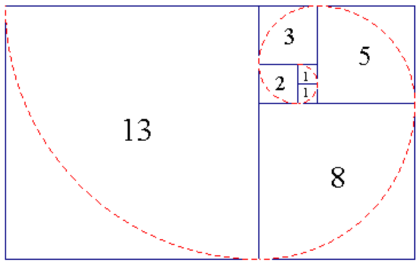
O esquema abaixo ilustra como são os referidos períodos.





Verifique que a ilustração acima está em conformidade com o enunciado do problema dos coelhos.

Essa seqüência está também presente na série de quadrados (ver figura ao lado), cujos números indicam a medida de um lado. Inscrevendo-se convenientemente em cada quadrado, um quarto de circunferência, construímos uma espiral, muito comum na natureza.



Cada retângulo que assim se forma é denominado *retângulo de Fibonacci*. Quanto maior for esse retângulo, mais se assemelha, matematicamente falando, a um retângulo áureo. Em outras palavras:

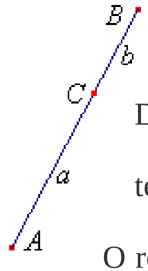
$$1/1,\ 1/2,\ 2/3,\ 3/5,\ 5/8,\ 8/13,\ \ldots$$ aproxima-se do número áureo.

Referência Bibliográfica

- BOYER, C. B. *História da Matemática*. Edgard Blücher, São Paulo, 1996.

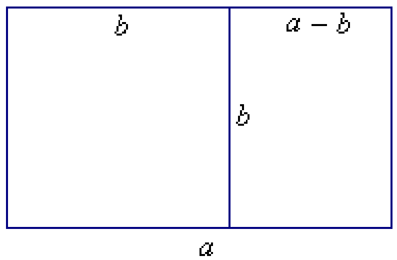
O número áureo

Dividamos um segmento AB com um ponto C, de sorte que $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{BC}{AC}$. Dizemos que C divide esse segmento em *média e extrema razão*. Tal divisão também é conhecida por *secção áurea* de AB, sendo que BC/AC é chamado *número áureo* ou *razão áurea*.



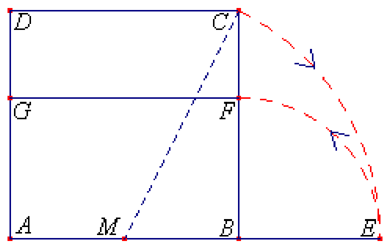
Da figura, $\dfrac{a}{a+b} = \dfrac{b}{a}$ implica em $b^2 + a.b = a^2$. Dividindo-se essa equação por a^2 e fazendo $m = b/a$, temos $m^2 + m - 1 = 0$, com solução positiva $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \cong 0{,}618$.

O retângulo com as dimensões a e b é denominado *retângulo áureo*. Quando dele suprimimos um quadrado, ele tem a propriedade de ter o retângulo remanescente semelhante ao inicial, isto é, também áureo, como podemos verificar na ilustração que se segue:



Temos que $\dfrac{a}{a+b} = \dfrac{b}{a} = \dfrac{a-b}{b}$, onde a 2ª igualdade, a qual justifica a referida semelhança, decorre da regra da proporção: $\dfrac{x}{y} = \dfrac{u}{v} = \dfrac{x-u}{y-v}$.

Para construí-lo geometricamente, assim procedemos:



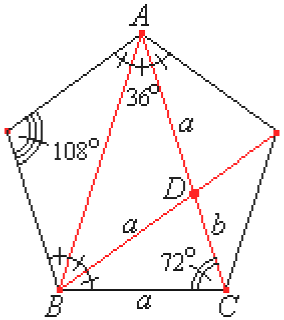
- a partir de um quadrado $ABCD$, com centro no ponto médio M de AB e com raio MC, traça-se um arco que intercepta a semi-reta $\overrightarrow{AB}$ em E.
- com centro em B e raio BE, traça-se um arco que intercepta BC em F.

O retângulo *ABFG* é áureo. De fato. Sendo *k* a medida do lado de tal quadrado, a hipotenusa *x* do triângulo *CBM* é assim calculada:

$$x^2 = k^2 + \left(\frac{k}{2}\right)^2 \text{, o que implica que } x = \frac{\sqrt{5}\cdot k}{2}.$$

Já que $ME = MC$ e que $BE = ME - MB$, então:

$$BF = BE = \frac{\sqrt{5}\cdot k}{2} - \frac{k}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot k. \text{ Daí: } \frac{BF}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$



O número áureo está também presente no pentágono regular. O ponto de encontro entre duas de suas diagonais as divide em média e extrema razão. A figura ao lado mostra o ponto *D* assim dividindo *AC*.

Observe que os triângulos *ABC* e *BCD* são semelhantes. Portanto, temos: $\frac{a}{a+b} = \frac{b}{a}$.

A igualdade de frações, na qual se origina o número áureo, é chamada de *divina proporção*, e motivos para tal qualificação são inúmeros e legítimos. O número áureo aparece na variação do tamanho de espirais, tais como a do caracol, das sementes do girassol e das galáxias. Aparece na variação do número de indivíduos de uma família de coelhos (ver próximo artigo), na razão entre o número de abelhas fêmea e abelhas macho de uma colméia. No corpo humano, ocorre nas razões entre várias de suas partes, tal como no quociente entre a medida do cotovelo à ponta do dedo e a medida do braço inteiro. Encontramos esse número em famosas sinfonias, como a 9ª de Beethoven. Por sua vez, o retângulo áureo está presente nas arquiteturas antigas e atuais, em quadros, cartões, fotos etc.

Agora, repare bem nas casas decimais dele e de seu inverso: $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \cong 0{,}61803398875$; $\frac{2}{\sqrt{5}-1} \cong 1{,}61803398875$. Fantástico, não!

A seqüência de Fibonacci

O comerciante italiano chamado Leonardo de Pisa, popularmente conhecido como filho de Bonaccio ou "Fibonacci", que viveu no final da Idade Média, foi um dos personagens que auxiliaram a propagar a matemática hindu-arábica no Ocidente.

Em 1202, concluiu uma obra com esse propósito, chamada *Líber Abaci* (livro do ábaco), em que preconiza intensamente a utilização de numerais hindu-arábicos no tratamento de problemas algébricos. Essa sua conduta cultural deve-se aos negócios que seu pai tinha no norte da África, tendo então ali estudado e conhecido profundamente os métodos matemáticos cultivados em toda essa região.

Entre muitos problemas que continha, alguns ficaram imortalizados. Eis dois exemplos:

1. *Sete ovelhas foram a Roma, cada uma tinha 7 mulas; cada mula carregava 7 sacos; cada saco continha 7 pães; e com cada pão havia 7 facas; cada faca estava dentro de 7 bainhas. Ovelhas, mulas, sacos, pães, facas e bainhas, quantos são?*

2. *Quantos pares de coelhos serão produzidos num ano, começando com um só par, se, em cada mês, cada par gera um novo par, que se torna produtivo a partir do segundo mês de existência?*

Esse segundo problema, cuja seqüência que gera tem propriedades intrigantes, movimentou a comunidade matemática no mundo todo desde então, até os dias de hoje.

A seqüência de Fibonacci, assim denominada, é a seguinte: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, …, definida recursivamente desta forma:

$$a_1 = a_2 = 1 \text{ e, para } n > 2 \ \ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

Conclui-se que cada termo, após os dois primeiros, é a soma dos dois imediatamente anteriores.