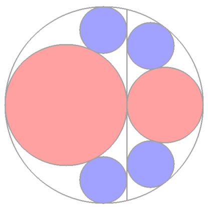
Conteúdo



Edição Especial

COLÉGIO absoluto ANGLO

Edição, ilustrações, seções e artigos não assinados: Calixto Garcia

Revisão: Cármen Silvia P. S. de Lima

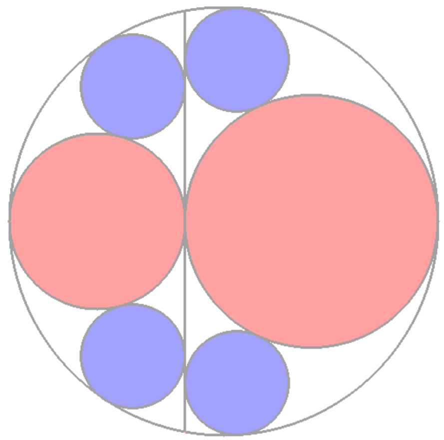
Esta edição está composta em *.doc*, fonte *Times New Roman*, corpo 12

Contatos: – *Colégio Absoluto - Anglo:*
Rua Antonio Nery, 550, Tietê, SP; A/C Prof. Calixto Garcia

– *E-mail - Prof. Calixto Garcia:*
klixg@yahoo.com.br

RMCA

REVISTA DE MATEMÁTICA DO COLÉGIO ABSOLUTO



Edição Especial

05

3º bimestre

2008

COLÉGIO absoluto ANGLO

Ao Leitor

Com grande satisfação, informamos que a **RMCA** está completando seu primeiro aniversário. Agradecemos aos leitores pelas palavras de incentivo e elogios ao longo desta jornada. Somos também gratos à Cármen, pelo valioso trabalho de revisão, e à escola, ao destinar em seu *site* um espaço para divulgação desta obra.

Procuramos oferecer um material que, além de tratar de assuntos de interesse do estudante, aborde temas que não fazem parte dos currículos escolares usuais. Objetivamos com isso ampliar o conhecimento da Matemática, selecionando tópicos relevantes dessa Ciência ao alcance do entendimento de nosso leitor cativo.

Boa leitura!

Calixto Garcia

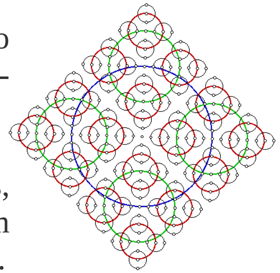
Os números primos

Todo número natural pode ser decomposto em fatores naturais. Exemplos: $5 = 1{\cdot}5$; $30 = 1{\cdot}2{\cdot}15$; $40 = 2{\cdot}4{\cdot}5 = 2{\cdot}2{\cdot}2{\cdot}5$. Isso pode ser realizado de forma a se constituir do maior número de fatores, todos não unitários. Os *primos* são os fatores desse tipo de decomposição. Em conseqüência disso, se um número é primo, pode ser decomposto em apenas dois fatores: os triviais, isto é, a unidade e ele próprio (seus únicos divisores). Caso contrário, é dito *composto*.

São primos: 2, 3, 5, 7, 11, …, 1.987, …, 10.006.427, … Com eles construímos o conjunto dos inteiros pela multiplicação. Daí considerá-los "tijolos inquebráveis e primitivos" dessa construção. Aliás, a palavra primo vem do latim *primus*, significando primário.

O estudo sistemático de tal classe de números deu-se com os gregos, há cerca de 2300 anos, e se estende até os dias de hoje.

Problemas propostos



1 – A figura ao lado exibe certo estágio de um *fractal* com o círculo maior de raio unitário. Obter a medida da área desse *fractal*.

2 – Os centros de 3 circunferências, tangentes duas a duas, são vértices de um triângulo cujos lados medem 5 cm, 8 cm e 9 cm. Determine as medidas de seus raios. Generalize esse resultado obtendo-as em função das medidas dos lados de um triângulo dado.

3 – (*desafio*) Seja ABC um triângulo retângulo em A e um ponto X no lado AB tal que CX = 4 é bissetriz de $B\hat{C}A$. Se BC = 24, quanto mede AC?

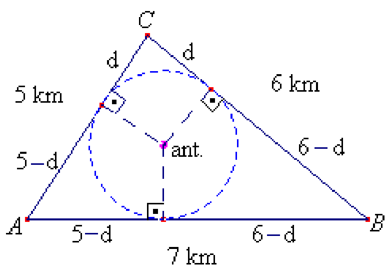
Respostas dos problemas da página 12:

1) $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+...+\frac{1}{49\cdot 50}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-...-\frac{1}{50}=1-\frac{1}{50}=\frac{49}{50}<1$

2) Nenhum inteiro entre 2008^2 e 2009^2 é quadrado perfeito. Há então $2009^2 - 2008^2 - 1 = (2009 - 2008)(2009 + 2008) - 1 = 4016$ números. Eles compõem um deserto de quadrados perfeitos inteiros.

3) $50 + n = 2{\cdot}(15 + 3n) \;\rightarrow\; n = 4$ anos.

4) Segundo a figura abaixo, $5 - d + 6 - d = 7 \quad\rightarrow\quad d = 2$ km.

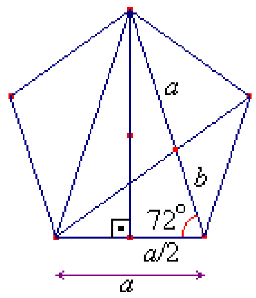


Assim sendo, os radares das estradas *AB* e *AC* devem ser instalados a 3 km da cidade *A*, e o radar da estrada *BC* deve ser instalado a 2 km da cidade *C*.

Você é capaz de calcular a distância dos radares à antena?

Problemas

Resolução dos problemas propostos no número anterior

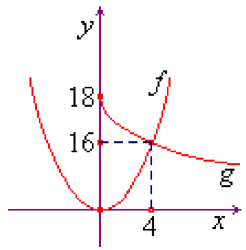


1 – Observe o pentágono regular a seguir. Como visto no segundo artigo da revista anterior, da semelhança entre triângulos, tem-se que $\frac{a}{a+b} = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Dividindo-se por 2 essa igualdade, vem: $\frac{a/2}{a+b} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \cos 72°$.

2 – Indiquemos o lado horizontal como base dos retângulos e o vertical, como altura. Se o retângulo *2* tem base b e altura a, os retângulos *1* e *3* terão medidas b e $(a + b)$, e a e $(b - a)$, nessa ordem. Como o retângulo *2* tem 20 cm a mais de perímetro que o retângulo *1*, então $(a + b) + b = 10 + a +$ b, ou seja, $b = 10$ cm. E como o retângulo *2* tem 16 cm a mais de perímetro que o *3*, então segue que $a + b = 8 + a + (b - a)$, ou seja, $a = 8$. Portanto, a folha toda, de lados com medidas $a + 2b = 28$ cm e $a + b = 18$ cm, possui área 504 cm^2.

3 – $\to\ x^2 + \sqrt{x} - 18 = 0 \ \to\ x^2 + \sqrt{x} - 16 - 2 = 0 \ \to$
$\to\ x^2 - 16 + \sqrt{x} - 2 = 0 \ \to\ (x-4)(x+4) + \sqrt{x} - 2 = 0 \to$
$\to\ (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)(x + 4) + \sqrt{x} - 2 = 0 \ \to$
$\to\ (\sqrt{x} - 2)[(\sqrt{x} + 2)(x + 4) + 1] = 0$. Então $\sqrt{x} - 2 = 0$ ou $x = 4$, já que o outro fator é positivo, visto que $x > 0$.

Observação: Este problema pode também ser resolvido graficamente, se considerarmos as funções f e g dadas por $f(x) = x^2$ e $g(x) = 18 - \sqrt{x}$, notando-se que interceptam-se em um único ponto de abscissa $x = 4$.



A criação de um processo, ainda que rudimentar, para obtê--los, inferiores a um dado inteiro n e prova da infinitude, foram os principais resultados conseguidos na Antiguidade acerca dos primos.

Encontramos a elegante demonstração de que há uma infinidade de primos em uma das mais importantes obras científicas da humanidade: "*Os Elementos*", do sábio grego Euclides. O método empregado nessa prova é o indireto ou o *reductio ad absurdum* (redução ao absurdo). A idéia é de sermos conduzidos a uma contradição, na medida em que admitimos a existência de uma quantidade finita de números primos.

Para tanto, suponhamos que os únicos números primos sejam 2, 3, 5, … e k, sendo este último o maior deles. Consideremos o número S = 2·3·5·…·k + 1. Como, evidentemente, S > k, então S não pode ser primo. Por outro lado, S deixa resto 1 quando dividido por cada um dos primos então concebidos. Assim sendo, não pode ser composto. Eis o absurdo: S não pode ser primo nem composto.

O sábio chamado Eratóstenes (276 – 194 a.C.), da escola de Alexandria, valeu-se de um sistema de triagem (crivo) para obter os primos inferiores a um inteiro dado. Assim, se queremos, por esse meio, os primos menores ou iguais a 22, escrevemos primeiramente uma lista de números inteiros de 2 a 22. Dela, eliminamos todos os múltiplos de 2 (exceto o 2), os múltiplos de 3 (exceto o 3), e assim por diante. Os números restantes são os primos procurados.

2, **3**, 4, **5**, 6, **7**, 8, 9, 10, **11**, 12, **13**, 14, 15, 16, **17**, 18, **19**, 20, 21, 22

Existe uma fórmula, embora mal jeitosa, que fornece todos os primos e somente eles, a saber:

$$P = \frac{y-1}{2} \cdot [\ |a^2 - 1| - (a^2 - 1)\ ] + 2,$$ onde y é natural estritamente positivo e $a = x(y + 1) - (y! + 1)$, com x natural.

Para $x = y = 1$, $P = 2$. Se $x = 1$ e $y = 2$, $P = 3$. Se $x = 5$ e $y = 4$, $P = 5$. Para $x = 103$ e $y = 6$, $P = 7$. Sendo $x = 329.891$ e $y = 10$, $P = 11$.

Fórmulas polinomiais também foram criadas, tal como P = $n^2 + n + 41$, que gera primos para n entre 0 e 39. Aliás, tal fórmula impressiona pela simplicidade e pela quantidade de primos que fabrica: 47,5 % das vezes, para números abaixo de 10 milhões.

Essas fórmulas não verificam a primaridade de um número. Para isso, é necessário que efetuemos a divisão dele pelos primos menores que ele, porém por todos não sendo necessário. De fato, sendo um natural n decomposto em dois fatores naturais r e s, com $s \geq r$, ao supormos que $r > \sqrt{n}$, obtemos o seguinte absurdo: $n = r \cdot s > \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} = n$. Assim, para verificar se um número n é ou não primo, basta analisar a divisibilidade dele pelos primos até $\sqrt{n}$. Por exemplo, para sabermos se 1999 é primo, averiguamos se é múltiplo de algum primo até 44, pois $\sqrt{1999} \cong 44{,}7$ (deixemos a cargo do leitor esse exame). Outrossim, os primos até 1999 podem ser obtidos do crivo de Eratóstenes até a eliminação dos múltiplos de 44.

Os matemáticos sempre procuraram uma uniformidade na distribuição dos primos ou um teste prático de primaridade. O matemático francês Adrien-Marie Legendre (1752 – 1833) conjecturou (e, cerca de 100 anos mais tarde, provou-se) que a quantidade de primos inferiores a certo número x (a qual simbolizou por $\pi(x)$) pode ser aproximada por $x/\ln x$. Assim, quanto maior o número x, mais próximo da quantidade de primos menores que x estará $x/\ln x$. Se dobrarmos o valor de x, $\pi(x)$ menos que dobra. Esse fato denuncia que os números primos vão ficando cada vez mais raros, à medida que avançamos na seqüência dos naturais. Mas não indica que, a partir de certo número, deixam de existir primos bem próximos, como os denominados *gêmeos* (primos do tipo p e $p + 2$), tais como 3 e 5, 5 e 7, 11 e 13, …, 521 e 523 etc., uma vez que não foi ainda provada a existência de infinitos primos desse tipo.

O que se pode comprovar é que os intervalos formados de números compostos vão se agigantando conforme imaginamos números cada vez maiores, compondo-se os ditos *desertos de primos*.

Abordagens de uma olimpíada de Matemática

Em artigo na **I RMCA**, apresentamos argumentos convincentes acerca da importância da participação de uma olimpíada de Matemática. Estamos certos de que essa atividade é enriquecedora e proporciona o prazer pela Matemática.

Apresentamos agora algumas questões típicas desse tipo de torneio. Lendo-as atentamente, notamos que exploram essencialmente o raciocínio. As estratégias de como proceder ao desfecho da resolução são conseguidas principalmente nas aulas de treinamento.

Procure resolver essas questões. Suas soluções encontram-se na página 14. Observe que, no 1º exemplo, um encaminhamento foi oferecido. No 2º, o uso de fatoração deixa a resolução mais leve. Crie uma expressão algébrica para a situação apresentada na 3ª questão. Um pouco de teoria e imaginação geométricas bastam para a última.

1 – Observe o valor das diferenças: $1-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$.

O valor da soma $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+...+\frac{1}{49\cdot 50}$ é maior ou menor que 1?

2 – Quantos números inteiros entre 2008^2 e 2009^2 não são quadrados perfeitos?

3 – Um pai tem 50 anos e a soma das idades de seus três filhos é 15 anos. Dentro de quantos anos a idade do pai será o dobro da soma das idades dos filhos?

4 – Em uma região plana, encontram-se 3 cidades A, B e C ligadas por estradas retilíneas de extensões AB = 7 km, AC = 5 km e BC = 6 km. Em cada estrada será instalado um radar que transmitirá dados a uma antena delas eqüidistante. Dê a localização dos radares nessas estradas (uma ilustração facilita a informação da sua resposta).

De fato, $K_0 = 3$; $K_1 = 5$; $K_2 = 17$; $K_3 = 257$ e $K_4 = 65.537$ são primos, mas Euler (1707–1783) provou que $K_5 = 1 + 2^{2^5}$ não o é: $K_5 = 4.294.967.297 = 641 \times 6.700.417$.

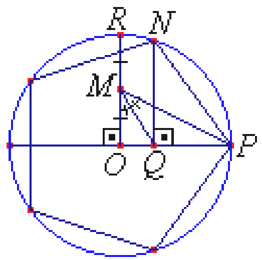
Do *Teorema de Gauss*, segue que:

$n = 3 = K_0$. Daí, é construtível o triângulo eqüilátero.
$n = 5 = K_1$. Daí, é construtível o pentágono regular.
$n = 6 = 2.3 = 2.K_0$. Daí, o hexágono regular é construtível.
$n = 9 = 3.3 = K_0.K_0$, primos ímpares, porém não distintos.
$n = 15 = 3.5 = K_0.K_1$. Daí, é construtível o pentadecágono regular.
$n = 17 = K_2$. Daí, é construtível o heptadecágono regular.

Verifique, com o auxílio desse teorema, que são também construtíveis os polígonos regulares de 10 e 12 lados e que é impossível serem construídos geometricamente, além do eneágono, polígonos regulares de 7, 11, 13 ou 14 lados.

Por conta das necessidades práticas, o homem acabou desenvolvendo técnicas de construções que contornassem tais impossibilidades. Muitas atingem excelentes precisões aos fins a que se destinam.

Uma construção interessante que realizaremos a seguir é a do pentágono regular inscrito em uma circunferência dada. O primeiro problema proposto na revista anterior, cuja solução encontra-se neste número (ver página 13), será útil para tanto, uma vez que o pentágono regular possui ângulo central de medida 72°. Observe a figura a seguir e acompanhe ao lado a justificativa de sua construção:



Sendo o raio *OP* unitário e *M* ponto médio de *OR*, então *MP* mede $\sqrt{5}/2$. Se *MQ* é bissetriz de *OMP* e *OQ* = *x*, então *QP* = 1 – *x* e assim, pelo teorema das bissetrizes, tem-se que:

$$\frac{1/2}{x} = \frac{\sqrt{5}/2}{1-x}. \text{ Daí: } x = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \cos(N\hat{O}Q) = 72°.$$

Uma maneira de localizarmos um deserto de 5 primos é considerarmos os números da forma 6! + *k*, que são evidentemente múltiplos de *k*, para *k* inteiro entre 2 e 6. Generalizando, uma seqüência de *n* números compostos consecutivos é dada por:

$$(n + 1)! + 2\,,\ (n + 1)! + 3\,,\ (n + 1)! + 4,\ \ldots\,,\ (n + 1)! + n$$

Além dos *primos gêmeos*, há outros tipos de primos. São *primos de Mersenne* (Marin Mersenne (1588 – 1648)) os números da forma $2^p - 1$ e *primos de Fermat* (Pierre de Fermat (1601? – 1665)) os números da forma $2^{2^n} + 1$. Já os primos *p*, tais que $2p + 1$ o são, constituem os chamados *primos de Sophie Germain* (1776 – 1831). Há também o primo denominado *primorial*, do tipo $p\#\pm 1$ (antecessor ou sucessor do produto dos primos menores ou iguais a um dado primo *p*), como, por exemplo, $7\# + 1 = 2\cdot3\cdot5\cdot7 + 1 = 211$. Os *primos fatoriais* são da forma $n!\pm 1$, tal como $4! - 1 = 23$. Os *primos multifatoriais* são, por exemplo, da forma $n!!!\pm 1$, em que o símbolo $n!!!$ representa o produto $n\cdot(n-3)\cdot(n-6)\cdot\ldots\cdot k$, sendo *k* o seu menor fator inteiro estritamente positivo, que, neste caso, vale 1, 2 ou 3. Assim, $7!!! + 1 = 7\cdot4\cdot1 + 1 = 29$ e $12!!!! - 1 = 12\cdot8\cdot4 - 1 = 383$.

Com o advento da computação eletrônica, por meio de procedimentos especiais, está sendo possível conhecer primos imensos. Eis alguns dos maiores primos encontrados atualmente:

Tipo	*Valor*	*Dígitos*	*Ano*
Sophie Germain	$48.047.305.725 \cdot 2^{172.403} - 1$	51.910	2007
Gêmeos	$2.003.663.613 \cdot 2^{195.000} \pm 1$	58.711	2007
Fatorial	$34.790! - 1$	142.891	2002
Primorial	$392.113\# + 1$	169.966	2001
Mersenne	$2^{32.582.657} - 1$	9.808.358	2006

O último da tabela (e o 44º desse tipo) é o maior primo conhecido até então. Uma fundação oferece um prêmio de $100 mil a quem primeiro descobri-lo com pelo menos 10 milhões de dígitos.

Além de encarada como desafio, a procura por primos gigantescos é útil para a codificação de mensagens (*Criptografia*), seja com fins militares, comerciais ou mesmo pessoais. Se você efetua o produto de dois ou mais fatores primos de grandes magnitudes, o número composto assim gerado é tão grande a ponto de ser praticamente impossível decompô-lo, uma vez que os métodos atuais de verificação de primaridade demandam muito tempo, sendo esse o importante fator limitante. Atualmente, esse é o recurso mais utilizado na Criptografia.

Os primos aparecem também na Geometria. Um exemplo desse fato é exposto em artigo desta revista, que trata da construção de polígonos regulares, cujos primos envolvidos são os *de Fermat*.

Pesquisadores brasileiros estudam o ciclo reprodutivo de certa espécie de cigarra. Ao que tudo indica, quando se utiliza de períodos primos de 13 ou 17 anos para se reproduzir, elas garantem maior sobrevivência à espécie. Sabe-se que o ciclo de vida de alguns de seus predadores naturais varia entre 2 e 5 anos. Assim, na pior das hipóteses (para as cigarras), haveria coincidência de gerações de $2 \cdot 13 = 26$ em 26 anos, e na melhor, de $5 \cdot 17 = 85$ em 85 anos. Tais períodos são relativamente longos aos predadores, enfraquecendo sua espécie ou levando-os à preferência por outras presas. Não bastasse objetivarem essa falta de sincronismo no ciclo reprodutivo, quando emergem do solo, fazem-no ao mesmo tempo, sendo suficiente parte delas para saciar a fome de outros predadores que ali estão a todo momento (tais como os pássaros), assegurando a sobrevivência das cigarras restantes, que irão promover a continuação da espécie.

Referências Bibliográficas

- EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. Editora da UNICAMP, Campinas, 2004.
- Revista do Professor de Matemática (RPM) n^{os} 11, 19 e 37. Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), São Paulo, 1987-91-98.
- www.mersenne.org

Construtibilidade de polígonos regulares

Em Matemática, diz-se que uma figura foi geometricamente construída se proveniente de intersecção entre retas, entre reta e circunferência ou entre circunferências. Daí afirmarmos que os instrumentos aceitos para Construção Geométrica são a régua e o compasso, apesar de estudos recentes darem conta de que é possível desenvolver uma geometria construtiva equivalente com a utilização apenas do compasso.

Construir geometricamente uma figura requer conhecimento de conceitos da Geometria Clássica. Decidir se uma figura pode ser construída apenas com régua e compasso exige que extrapolemos esse campo. A Álgebra Abstrata é fundamental nesses casos, assunto esse tratado em ensino superior.

Quanto aos polígonos regulares, é possível construir o triângulo, o quadrado, o hexágono, o octógono, sem grandes dificuldades. Aliás, os gregos antigos provaram que, se podem ser construídos (com régua e compasso) polígonos regulares de m e n lados, com m e n primos entre si, então pode-se construir um polígono regular de $m.n$ lados.

Equivalentemente, a questão é a de dividir uma circunferência em n arcos de medidas iguais. Esse problema perdurou por mais de 2000 anos, desde os gregos, até que, em março de 1796, Friedrich Gauss (1777-1855), então com 19 anos de idade, encontrou uma resposta para ele. O *Teorema de Gauss* nos diz quais são os polígonos regulares que podemos construir além daqueles com 2^k lados, sendo k número natural maior que 1: um polígono regular de n lados pode ser construído com régua e compasso quando, e somente quando, ao decompor n, seus fatores ímpares forem *primos de Fermat* (primos da forma $K_i = 1 + 2^{2^i}$), todos distintos.

Observemos que nem todo número desta forma é um primo, embora Fermat houvesse conjecturado que assim fossem.

Sendo unitária a medida dos lados do triângulo e designando por P_n o perímetro da figura no estágio n, cada segmento, em cada etapa, transforma-se em 4 segmentos, cada qual com a terça parte da medida daquele que o gerou, e assim, sucessivamente.

$$P_0 = 3\cdot 1 = 3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^0 \;;\; P_1 = 3\cdot 4\cdot\frac{1}{3} = 3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^1 \;;\; P_2 = 3\cdot 4^2\cdot\frac{1}{9} = 3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^2 \;;\; \ldots$$

Pelo visto, ficamos com $P_n = 3\cdot(4/3)^n$, que tende ao infinito quando assim n se comporta, uma vez que 4/3 é maior que 1.

Quanto à área A_n dessa figura, observe que, em relação ao estágio anterior, são acrescidos triângulos eqüiláteros com lados 3 vezes menor, contribuindo com área 9 vezes menor, cada um.

$$A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} \;;\; A_1 = A_0 + 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{9} \;;\; A_2 = A_0 + A_1 + 12\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{81}; \ldots$$

Podemos então deduzir que:

$$A_\infty = \frac{\sqrt{3}}{4} + 3\cdot 4^0\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{9} + 3\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{9^2} + 3\cdot 4^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{9^3} + \ldots$$

Multiplicando-se e dividindo-se as parcelas de A_∞ por 4, fatorando-se e observando a soma infinita de uma P.G., ficamos com:

$$A_\infty = \frac{4\sqrt{3}}{16} + \frac{3\sqrt{3}}{16}\cdot\left[\frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^3 + \cdots\right] = \frac{4\sqrt{3}}{16} + \frac{3\sqrt{3}}{16}\cdot\frac{4}{5}$$

Assim: $A_\infty = \frac{\sqrt{3}}{16}\cdot\left(4 + \frac{12}{5}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{5} \cong 0{,}693.$

A *Teoria dos Fractais* ficou conhecida como *Teoria do Caos*, por ser utilizada em estudos de regularidade de sistemas caóticos, tais como na Meteorologia (previsão do tempo), Geologia (ocorrência de terremotos), Economia (estimativa dos índices das bolsas de valores), Astronomia (movimento de corpos celestes) etc. Por sua vez, essa teoria é importante na avaliação do comprimento de uma curva ou do contorno de um mapa, e na análise de padrões e texturas em imagens.

Fractais

O artigo que inaugurou esta revista tratou de dimensões inteiras.

O presente texto refere-se a dimensões não inteiras. Esse estudo criou um dos mais recentes domínios da Matemática: a *Geometria Fractal*.

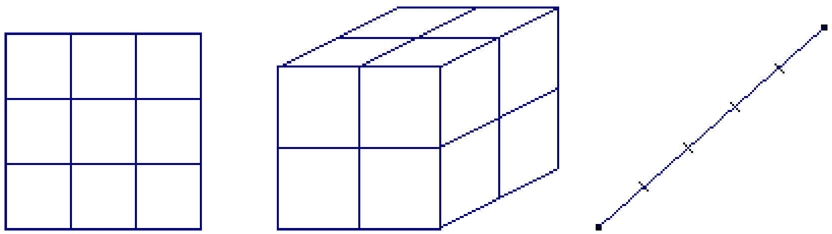
Essa Geometria se ocupa de caracterizar formas intrínsecas encontradas na natureza as quais a Geometria convencional não é capaz de explicar. A auto-semelhança em diferentes níveis de escala é uma das peculiaridades que contêm as figuras, objeto desse estudo. Em outras palavras, há um padrão repetitivo em sua construção geométrica, o que invariavelmente conduz a uma estrutura de complexidade infinita: o *fractal*.

Assim, em dado estágio da formação de um *fractal*, qualquer pedaço seu é reprodução do todo, como acontece, por exemplo, com o padrão de crescimento de galhos e de folhas em uma árvore.

Na *Geometria Fractal*, o que se considera não é a dimensão do espaço que a figura ocupa e sim o nível de irregularidade que ela apresenta, segundo o padrão repetitivo que possui. A medida desse nível de irregularidade é denominada *dimensão fractal*.

Observe que essa propriedade ocorre com o seguinte *fractal*, conhecido por *curva de Koch*, cuja construção se dá dividindo-se sucessivamente os segmentos em 3 partes, girando-se o do meio em 60° e ligando-o ao da direita com outro segmento de mesma medida.

Para deduzir uma expressão matemática da dimensão de um *fractal*, examinemos as seguintes figuras regulares com dimensões inteiras. Vamos estabelecer uma relação entre sua dimensão D, o número N de unidades, nesta dimensão, de que é constituída a figura, e o comprimento C do segmento, na unidade definida, referente ao estágio inicial. Identifiquemos, então, por meio destes exemplos, os valores dessas variáveis:



$D = 2$; $N = 9$ e $C = 3$ $D = 3$; $N = 8$ e $C = 2$ $D = 1$; $N = 5$ e $C = 5$

Por conseguinte: $N = C^D$ ou $D = \log_C N$

Observando o primeiro estágio da *curva de Koch*, temos que $N = 4$ e $C = 3$. Daí: $D = \log_3 4 \cong 1{,}2619$.

Note que, se observarmos o segundo estágio, chegaremos à mesma conclusão. De fato: $N = 16$ e $C = 9$. Daí: $D = \log_9 16 = \log_3 4$.

Outros exemplos:

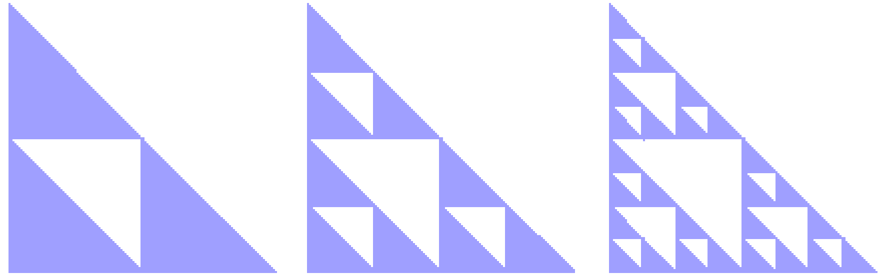
♦ O *fractal* conhecido por *poeira de Cantor* constitui-se da trissecção sucessiva de um segmento, desprezando-se o do meio.

Do primeiro estágio, se tem:

$N = 2$ e $C = 3$

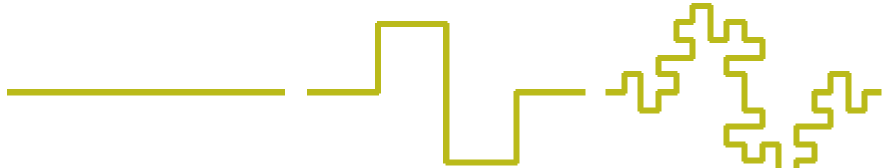
Com isso: $D = \log_3 2 \cong 0{,}6309$.

O *triângulo de Sierpinski* é o *fractal* construído da seguinte forma: a partir dos pontos médios de um triângulo dado, constrói-se um triângulo central, que, por sua vez, é dele suprimido. Repete-se esse processo nos triângulos restantes, sucessivamente.



Neste caso, $N = 3$ e $C = 2$, que implica em $D = \log_2 3 \cong 1{,}585$.

♦ Uma variedade quadrada da *curva de Koch* é a seguinte:



Aqui se tem $N = 8$ e $C = 4$, o que acarreta em $D = \log_4 8 = 1{,}5$.

♦ Se a *curva de Koch* for construída repetidamente em cada lado de um triângulo eqüilátero, criamos a estrutura *fractal* denominada *ilha*, *floco de neve* ou *tapete de Koch*. Possui a mesma dimensão da curva que a criou.

Um fato curioso que ocorre com esse *fractal* é apresentar perímetro de comprimento tão grande quanto se queira, porém abrigar uma área finita, como se comprova pelos cálculos a seguir: