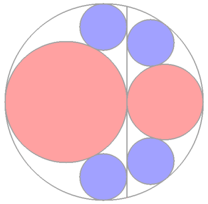
Conteúdo



Edição, ilustrações, seções e artigos não assinados: Calixto Garcia

Revisão: Cármen Silvia P. S. de Lima

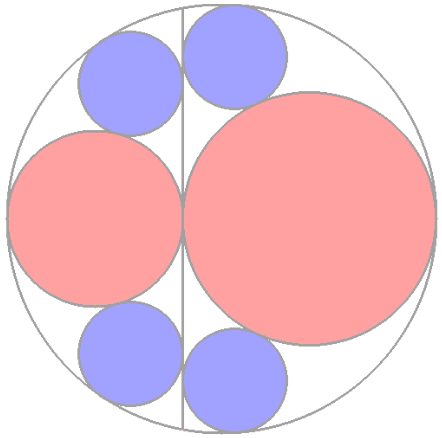
Esta edição está composta em *.doc*, fonte *Times New Roman*, corpo *12*

Contatos: – *Colégio Absoluto - Anglo:*
Rua Antonio Nery, 550, Tietê, SP; A/C Prof. Calixto Garcia

– *E-mail - Prof. Calixto Garcia:*
klixg@yahoo.com.br

RMCA

REVISTA DE MATEMÁTICA
DO COLÉGIO ABSOLUTO



06

4º bimestre

2008

Ao Leitor

A Matemática, como estruturalmente se organiza, oferece-nos situações interessantes, como as exploradas em dois artigos desta edição, com abordagens antagônicas.

Parabenizamos o prof. *Carrarinho* e sua aluna de treinamento Alice P. Brandão pelo excelente resultado obtido na OMU 2008.

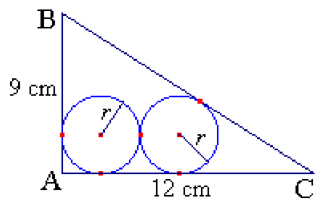
Boa leitura!

Calixto Garcia

Um problema com vários desfechos

Não é raro encontrarmos problemas matemáticos que podem ser resolvidos de diferentes maneiras. É o que ocorre com a seguinte questão:

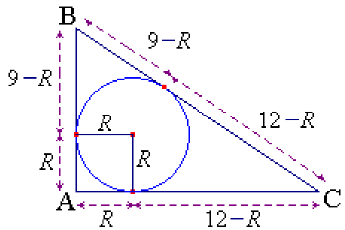
No triângulo retângulo em A ao lado, as circunferências de mesmo raio *r* estão inscritas e tangenciam-se entre si. Calcular a medida do raio *r*.



Solução 1:

A hipotenusa desse triângulo mede 15 cm, obtida com o uso do teorema de Pitágoras. A medida do raio *R* da circunferência nele inscrita pode ser assim calculada:

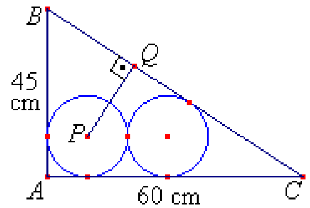
$$9 - R + 12 - R = 15 \quad \rightarrow \quad R = 3 \text{ cm}$$



Passando pelo ponto de tangência entre as circunferências, tracemos uma paralela ao lado AB interceptando os outros lados em D e E, como indicado na figura a seguir.

Problemas propostos

1 – No triângulo retângulo em A ao lado, as circunferências de mesmo raio estão inscritas e tangenciam-se entre si. Calcular a medida do segmento *PQ* como indicado na figura.



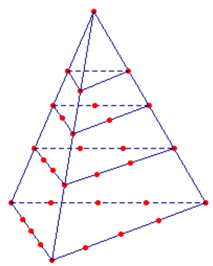
2 – Qual é a diferença entre a média aritmética do primeiro milhão de naturais ímpares e a do primeiro milhão de naturais pares?

3 – (*desafio*) No plano cartesiano, tomam-se os pontos de coordenadas inteiras e positivas. Os pontos com ambas as coordenadas ímpares são marcados. Se for considerado um quadrado *ABCD*, com *A*(1,1), *B*(*n*,1), *C*(*n*,*n*), *D*(*n*,1), qual a razão entre o número de pontos marcados e o número de pontos não marcados, dentro e nas linhas do quadrado, em termos de *n*?

[*este problema, que envolve números figurados no plano cartesiano, foi enviado por Mateus Zanetti*]

Números piramidais

Denominemos assim os números figurados representados por pontos sobre vértices e arestas de pirâmides. A figura ao lado ilustra a construção da seqüência de números piramidais triangulares: 1, 4, 10, 19, 31, … Seus *n* primeiros termos podem ser deste modo reescritos: 1, 1 + 3, 1 + 3 + 6, 1 + 3 + 6 + 9, …, 1 + 3 + …+ (*n* – 1)·3. Verifique, leitor, que seu *n*-ésimo termo é então dado por: $(3n^2 - 3n + 2)/2$. Crie também outras seqüências de números piramidais.



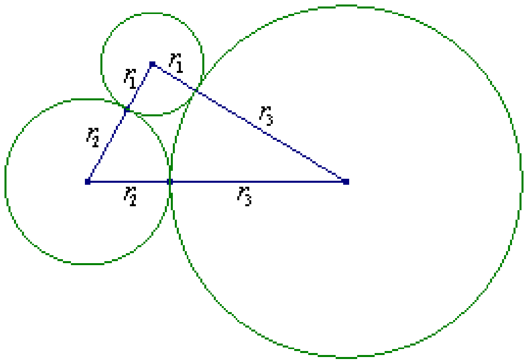
Na **RMCA 01**, aparece outra categoria de números figurados representando vértices de figuras em diferentes dimensões.

Problemas

Resolução dos problemas propostos no número anterior

1 – Observe que o *fractal* assume a forma de um quadrado com diagonal $1 + 1/2 + 1/2^2 + 1/2^3 + 1/2^4 + \ldots = 2$ (soma de P.G.). Daí, sua área terá medida 2.

2 – Sejam $a = r_1 + r_2 = 5$; $b = r_1 + r_3 = 8$ e $c = r_2 + r_3 = 9$.

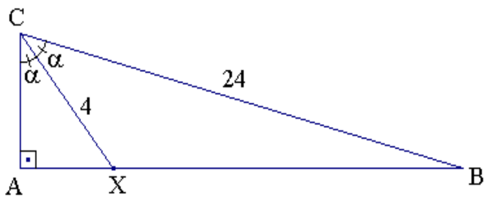


Subtraindo-se da 3ª a 2ª equação, temos $r_2 - r_1 = 1$ que, somada à 1ª equação, obtemos $r_2 = 3$ cm e, daí, $r_1 = 2$ cm e $r_3 = 6$cm.

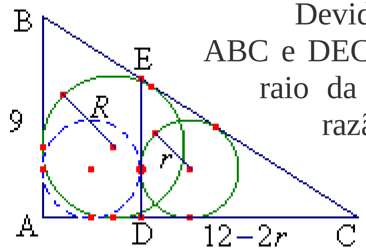
Da generalização desse processo: $r_2 = (a + c - b)/2$ e, assim, $r_1 = (a + b - c)/2$ e $r_3 = (-a + c + b)/2$.

Observação: Note que a circunferência inscrita nesse triângulo passa pelos pontos de tangência entre as circunferências construídas. Aliás, não é difícil construir geometricamente tais circunferências, pois seus raios são dados por expressões algébricas elementares.

3 – No ΔAXC temos cos α = AC/4 e no ΔABC temos cos 2α = AC/24. Logo, $6\cdot\cos(2\alpha) = \cos\alpha$. E já que $\cos(2\alpha) = 2\cdot\cos^2\alpha - 1$ então $12\cdot\cos^2\alpha - \cos\alpha - 6 = 0$.



Resolvendo essa equação, ficamos com cos α = 3/4, pois $\alpha < 90°$. Daí AC/4 = 3/4, isto é, AC = 3.

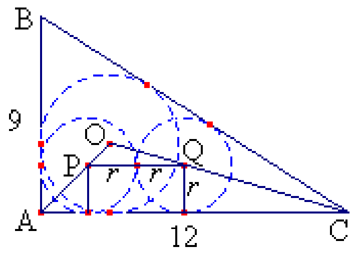


Devido à semelhança entre os triângulos ABC e DEC, a razão entre o lado de um deles e o raio da circunferência nele inscrita é igual à razão entre o respectivo lado do outro e o raio da correspondente circunferência inscrita: $\frac{12}{3} = \frac{12-2r}{r} \rightarrow r = 2$ cm.

Solução 2:

Observe na figura a seguir que, por se tratar de bissetrizes, as semi-retas AO e CO contêm os pontos P e Q, respectivamente. Note então o retângulo de base $2r$ e altura r inscrito em um triângulo de base 12 cm e altura $R = 3$ cm.

Da semelhança entre os triângulos OPQ e OAC, acarreta que são iguais os quocientes entre as medidas da base e da altura de cada um deles: $\frac{12}{3} = \frac{2r}{3-r} \rightarrow r = 2$ cm.

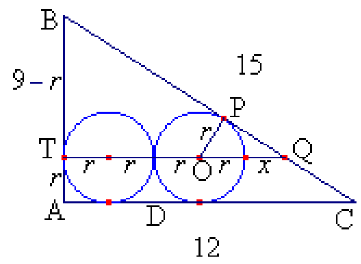


Solução 3:

Nota-se na ilustração seguinte que são semelhantes os triângulos ABC e POQ e TBQ. Então, a razão entre dois dos lados de um deles é igual à razão dos respectivos lados do outro triângulo, como abaixo escrevemos:

$\Delta ABC \sim \Delta TBQ \rightarrow \frac{12}{9} = \frac{4r+x}{9-r}$

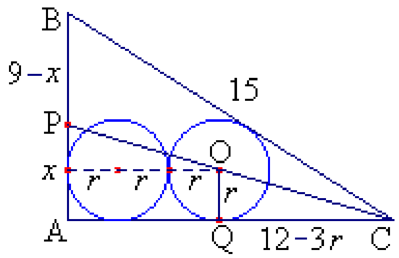
$\Delta ABC \sim \Delta POQ \rightarrow \frac{15}{9} = \frac{r+x}{r}$



Eliminando-se x em ambas as equações, ficamos com $r = 2$ cm.

Solução 4:

A semi-reta CP é uma bissetriz do triângulo ABC. Aplicando o teorema das bissetrizes, tem-se que:



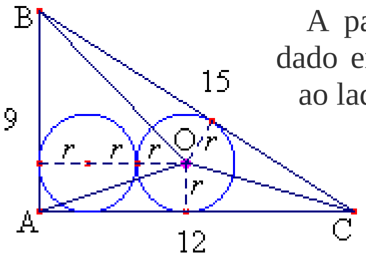
$\frac{15}{9-x} = \frac{12}{x}$, que implica em $x = 4$.

Como são semelhantes os triângulos CAP e CQO, segue que:

$$\frac{12}{4} = \frac{12-3r}{r} \quad \rightarrow \quad r = 2 \text{ cm.}$$

Solução 5:

Observe que as resoluções anteriores apoiaram-se todas na semelhança entre triângulos. Diferentemente, esta se baseia em áreas, um campo de atuação inusitado para o problema, por assim dizer. Talvez por esse fato, possa ser considerada a mais elegante.



A partir do ponto O, dividimos o triângulo dado em três triângulos, como mostra a figura ao lado. A soma das áreas destes é igual à área do triângulo ABC, que vale 54 cm^2. Daí:

$$\frac{12 \cdot r}{2} + \frac{15 \cdot r}{2} + \frac{9 \cdot 3r}{2} = 54 \rightarrow r = 2 \text{ cm.}$$

Embora uma solução seja o bastante, a análise de todas as resoluções é tarefa enriquecedora e tem a função de alimentar a bagagem de conhecimentos que devemos ter para atacar um problema matemático. A diversidade de caminhos que verificamos nesse estudo legitima o caráter corporativo dessa Ciência.

Referências Bibliográficas

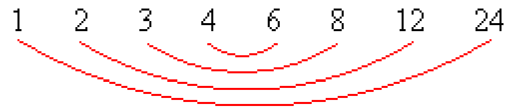
- Revista do Professor de Matemática n^{os} 22, 23, 24 e 58. Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), São Paulo, 1992-93-93-2005.

Seqüências de divisores

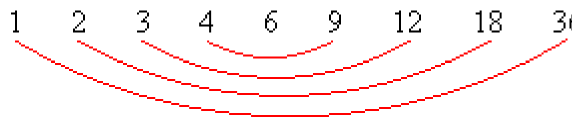
Em artigo da **RMCA 01**, que tratou de figuras de dimensões inteiras, vimos os divisores de um número dispostos organizadamente em seus vértices. Aqui, vamos distribuí-los em ordem crescente e faremos um breve estudo de algumas particularidades que essa seqüência possui.

Consideremos os divisores naturais de 24 e de 36:

$D_{24} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$ $D_{36} = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$



Note que é par o número de divisores de 24. Portanto é possível realizar os agrupamentos como o da ilustração. Cada par de divisores assim agrupados possui produto 24, e mais: a raiz quadrada de 24 está entre o par central dos divisores.



Como é ímpar o número de divisores de 36, essa seqüência possui o termo central. É justamente esse termo a raiz quadrada do número em questão. Assim, é um quadrado o número que tem quantidade ímpar de divisores. Note que, no caso de possuir exatamente 3 divisores, o número considerado é um quadrado de um primo.

Conclui-se disso que, para encontrarmos todos os divisores de um dado número, basta procurar pelos divisores que são menores ou iguais à sua raiz quadrada. Os outros complementam o produto com esses. É um processo semelhante ao que ocorre na busca de números primos, como visto em artigo da **RMCA 05**.

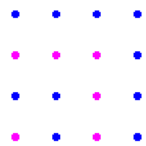
Por exemplo, como $\sqrt{56} \cong 7{,}5$, os divisores de 56 que são menores ou iguais a 7 são 1, 2, 4 e 7, sendo seus complementares de produto 56 os divisores 56, 28, 14 e 8, respectivamente.

$$T_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

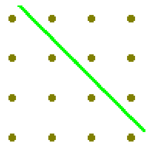
$$Q_n = 1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1 = n^2$$

$$P_n = 1 + 4 + 7 + \ldots + 3n - 2 = \frac{n\cdot(3n-1)}{2}$$

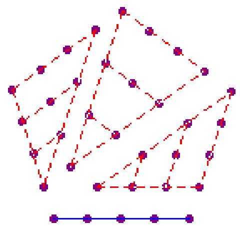
Por via geométrica, podem-se notar várias propriedades que envolvem os números figurados, inclusive comprovar os resultados acima obtidos, além de possibilitar generalizações.



Observe na ilustração à direita que os números quadrados são, um a um, fabricados com o acréscimo de números ímpares consecutivos.



Constata-se, pela figura ao lado, que todo número quadrado pode ser expresso como soma de dois números triangulares consecutivos. Procure demonstrar algebricamente esse fato.

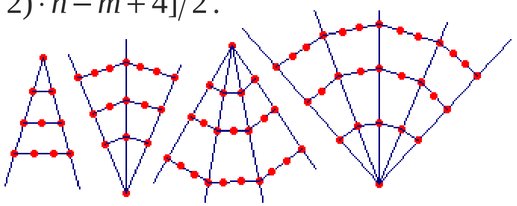


Já um número pentagonal qualquer P_n pode ser obtido da soma de n com 3 vezes o número triangular T_{n-1}, como se pode verificar na figura ao lado.

De fato, $n + 3\cdot\frac{(n-1)\cdot n}{2} = \frac{n\cdot(3n-1)}{2} = T_n$.

Mostre, leitor, que o n-ésimo número hexagonal é dado por $2n^2 - n$. Procure generalizar para o n-ésimo número m-gonal. Deverá encontrar a resposta: $n\cdot[(m-2)\cdot n - m + 4]/2$.

Ao lado, exibimos os números figurados em uma configuração diferente:



Referência Bibliográfica

- EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. Editora da UNICAMP, Campinas, 2004.

Vários problemas com um desfecho

Em contraponto ao artigo anterior, encontramos diferentes problemas que nos conduzem a uma mesma resolução.

Problema 1:

Encontrar todos os pares de frações positivas de numerador unitário cuja soma é ½.

Resolução:

Isso equivale a obter os valores inteiros m e n para os quais:

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$$

Os problemas ditos *diofantinos*, em inapropriada deferência a Diofanto de Alexandria, que viveu por volta do primeiro século da era cristã, são aqueles que apresentam soluções inteiras (mais precisamente, racionais). Embora Diofanto não tenha sido o precursor dos estudos dessa espécie de problemas, que aparecem em sua mais importante obra, *Aritmética*, provavelmente ele tenha sido um dos pioneiros a criar uma notação algébrica para expressões matemáticas.

Voltando à resolução de nosso problema, sem perda de generalidade, podemos supor que $m \le n$ (ou que $\frac{1}{n} \le \frac{1}{m}$).

Como $\frac{1}{2} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \le \frac{1}{m} + \frac{1}{m} = \frac{2}{m}$, então $m \le 4$. E como $\frac{1}{n} > 0$, então $\frac{1}{2} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} > \frac{1}{m}$ ou $m > 2$. Resumindo, devemos ter $2 < m \le 4$.

Para $m = 3 \;\rightarrow\; \frac{1}{3} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} \;\rightarrow\; \frac{1}{n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \;\rightarrow\; n = 6$.

Para $m = 4 \;\rightarrow\; \frac{1}{4} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} \;\rightarrow\; \frac{1}{n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \;\rightarrow\; n = 4$.

Assim, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{6}$ ou $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{4}$ são os pares de frações procurados.

Problema 2:

Quais retângulos têm área numericamente igual ao perímetro?

Resolução:

Sendo m e n as suas dimensões, então temos que:

$$2m + 2n = mn \xrightarrow{\div 2mn} \frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{1}{2}$$

Assim, os únicos retângulos que obedecem às condições do enunciado são aqueles com dimensões 3 e 6 ou 4 e 4.

Problema 3:

Quais são os polígonos regulares de n lados que podem ficar justapostos num plano?

Resolução:

Seja m a quantidade de polígonos regulares de n lados que podemos justapor em torno de um dado vértice comum numa superfície plana, de modo a não haver nenhuma sobreposição entre quaisquer deles. Seja a_i o ângulo interno desses polígonos.

Assim sendo, devemos ter $m \cdot a_i = 360°$, ou seja:

$$m \cdot \frac{(n-2)\cdot 180}{n} = 360 \quad \rightarrow \quad 180 \cdot mn - 360 \cdot m = 360 \cdot n \quad \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\div 360mn} \frac{1}{2} - \frac{1}{n} = \frac{1}{m} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$$

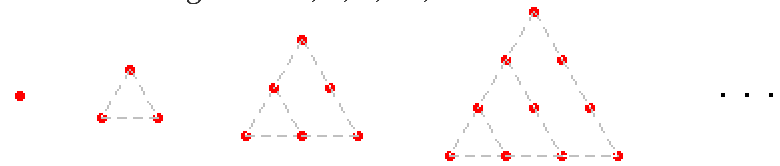
Portanto, em torno de um dado ponto dessa superfície, podemos justapor $m = 6$ triângulos eqüiláteros ($n = 3$), ou $m = 4$ quadrados ($n = 4$) ou ainda, $m = 3$ hexágonos ($n = 6$). O recobrimento assim construído compõe um mosaico com uma só forma geométrica.

Números figurados

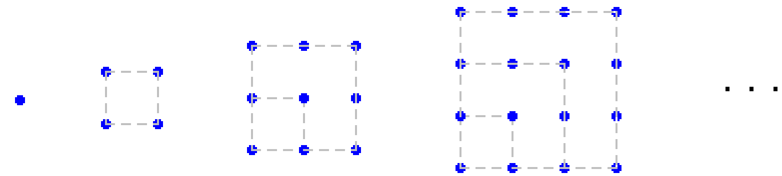
Consideremos uma coleção ordenada de números que representem uma seqüência de figuras geométricas similares. Números com essa qualidade são ditos *figurados*. Eles foram estudados pelos membros mais antigos da escola pitagórica.

Exemplos:

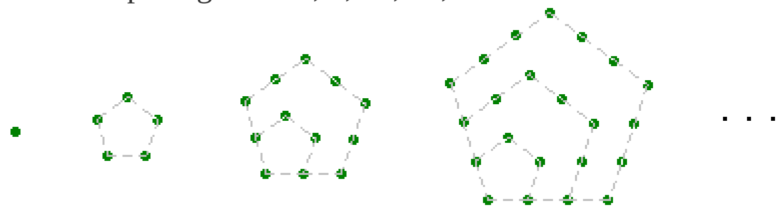
❖ Números triangulares: 1, 3, 6, 10, …



❖ Números quadrados: 1, 4, 9, 16, …



❖ Números pentagonais: 1, 5, 12, 22, …



Note que o n-ésimo número triangular (T_n) é a soma dos n primeiros termos da Progressão Aritmética [1, 2, 3, …]. Já o número quadrado Q_n é a soma dos n primeiros termos da P.A. [1, 3, 5, …], e o número pentagonal P_n é a soma dos n primeiros termos da P.A. [1, 4, 7, …].

Verifique que, pela fórmula da soma da P.A., tem-se: