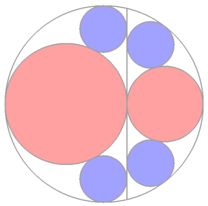
Conteúdo



Edição, ilustrações, seções e artigos não assinados: Calixto Garcia

Revisão: Cármen Silvia P. S. de Lima

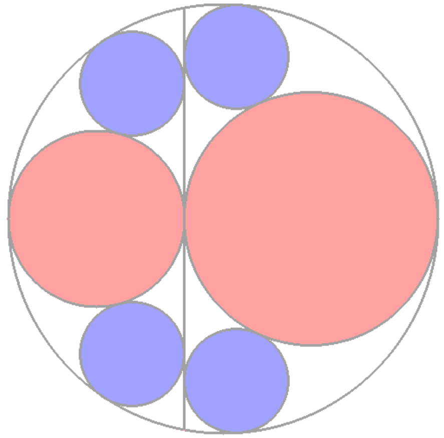
Esta edição está composta em *.doc*, fonte *Times New Roman*, corpo *12*

Contatos: – *Colégio Absoluto - Anglo:*
Rua Antonio Nery, 550, Tietê, SP; A/C Prof. Calixto Garcia

– *E-mail - Prof. Calixto Garcia:*
klixg@yahoo.com.br

RMCA

REVISTA DE MATEMÁTICA
DO COLÉGIO ABSOLUTO



07

1º bimestre

2009

Ao Leitor

Desejamos a todos um ótimo 2009!

Este ano temos a pretensão de realizar as Olimpíadas de Matemática em nossa escola. A intenção é promovê-la em dois níveis: I, para 7ª e 8ª séries, e II, para o Ensino Médio. Aulas de treinamento serão necessárias, devido à peculiaridade de sua abordagem. Porém, mais importante que a participação efetiva nesse torneio, são a criatividade, a lógica e o raciocínio que o treinamento desenvolve a quem dele usufrui.

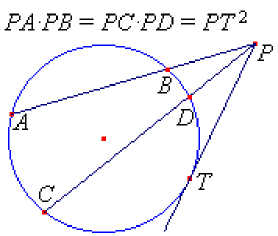
Levaremos essas idéias ao conhecimento da coordenação e informaremos os detalhes desse projeto.

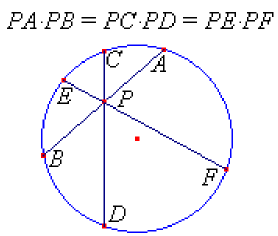
Boa leitura!

Calixto Garcia

Eixo radical

O *teorema das cordas*, oriundo do livro *Os Elementos* de Euclides, foi mais tarde pesquisado pelo geômetra suíço Jacob Steiner (1796 - 1863). A ele se deve a utilização do termo *potência de ponto* para o produto $PA{\cdot}PB$ (ver figuras). Esse assunto é estudado desde o Ensino Fundamental, uma vez que se apóia em noções elementares da Geometria, entre as quais, a semelhança de triângulos.





Problemas propostos

1 – Uma das formas de se chamar a atenção dos observadores para a grandiosidade de um monumento é a de situá-los em uma posição tal, que proporcione o maior ângulo de visão possível.

Uma estátua de altura *n* foi construída sobre um pedestal de altura *p*. Um observador, cujos olhos estão a uma altura *m*, $m < p$, enxerga do pé ao topo da estátua sob ângulo α, que varia de acordo com a distância *d* entre o observador e o centro da base do pedestal. Determine, com régua e compasso, a posição do observador, de modo que o ângulo de visão seja o maior possível. Justifique sua resposta.

Estimar a altura da estátua do Cristo Redentor, no Rio de Janeiro, se seu pedestal mede 8 m e se um observador com 1,75 m de altura deve ficar a 15 m do centro da base do pedestal para que o ângulo de visão seja o maior possível.

2 – Demonstre que a soma dos cubos dos *n* primeiros inteiros estritamente positivos vale o quadrado da soma desses inteiros. Em outras palavras, mostre que $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$, ou ainda, que $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \left[\dfrac{n\cdot(n+1)}{2}\right]^2$.

3 – (*desafio*) Sejam, num plano, os pontos P_1 e P_2 exteriores (ou interiores) à região compreendida por uma circunferência dada de centro no ponto *C*. Construir geometricamente as circunferências que passam pelos pontos P_1 e P_2 e são tangentes à circunferência dada.

Resposta das questões propostas na página 8:

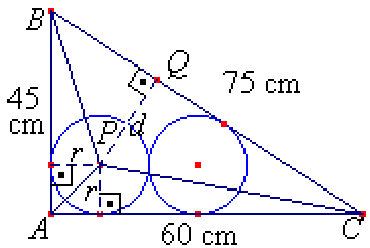
a) O número de blocos ocultos da figura *n* é igual ao número de blocos da figura $n - 1$, ou seja, $(n-1)\cdot n\cdot(n+1)/6$.

b) A área total da *n*-ésima pilha é $6n\cdot(n+1)/2 = 3n\cdot(n+1)$.

Problemas

Resolução dos problemas propostos no número anterior

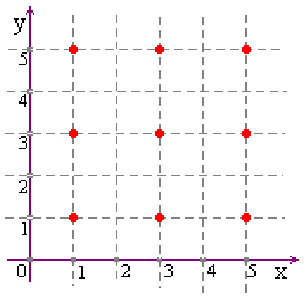
1 – Pelo teorema de Pitágoras, obtemos 75 cm para a medida da hipotenusa. Utilizando-se de qualquer método apresentado em artigo da **RMCA 06**, conseguimos para o raio das circunferências inscritas a medida 10 cm. Agora, semelhantemente ao último método (por áreas), obtemos $d = PQ = 22$ cm a partir da seguinte equação:



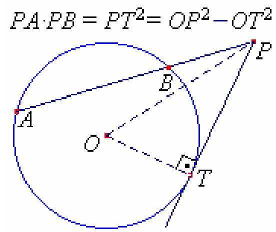
$$\frac{75 \cdot d}{2} + \frac{60 \cdot 10}{2} + \frac{45 \cdot 10}{2} = \frac{45 \cdot 60}{2}$$

2 – Sabemos que a soma dos n primeiros ímpares positivos vale n^2 e que a soma dos n primeiros números pares positivos (o zero sendo o primeiro deles) vale $n(n - 1)$. Ambas são somas de P.A. A diferença entre as médias aritméticas desses dois conjuntos de números é então: $\frac{n^2}{n} - \frac{n(n-1)}{n} = n - (n-1) = 1$, para todo n natural.

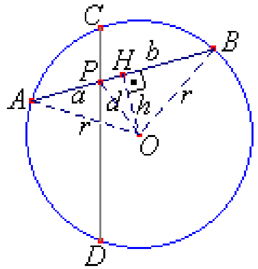
3 – Alguns pontos com ambas as coordenadas ímpares estão destacados na figura ao lado. Sendo n componente das coordenadas dos vértices dos quadrados, conforme o enunciado do problema, para n par, o número de pontos marcados abrangidos por eles é $(n/2)^2$ e o de não marcados, $n^2 - (n/2)^2$. Note que a razão entre essas quantias independe de n e vale 1/3. Já com n ímpar, essas quantidades são, nessa ordem, $\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$ e $n^2 - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$. O quociente $(n+1)^2 / ((n-1)(3n+1))$ é a razão entre elas.



O valor de $PA{\cdot}PB = PT^2$ da figura ao lado denuncia sua dependência de d, distância de P ao centro da referida circunferência, bem como a dependência de seu raio r, uma vez que, sendo retângulo o triângulo PTO, do teorema de Pitágoras: $PT^2 = d^2 - r^2$. Daí, podemos dizer que $PA{\cdot}PB$ é constante.

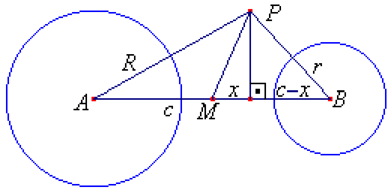


Fato análogo ocorre quando o ponto P está na região abrangida pela circunferência. Com $PA = a$, $PB = b$, $OP = d$, $OA = OB = r$ e $OH = h$, $BH = \frac{a+b}{2}$, $PH = \frac{a+b}{2} - a = \frac{b-a}{2}$ e $h^2 = d^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = r^2 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$. Daí, temos que $d^2 - r^2 = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = -\,a{\cdot}b = -\,PA{\cdot}PB = -\,PC{\cdot}PD$.



Com isso, dada uma circunferência λ de raio r e um ponto P à distancia d de seu centro, podemos definir a potência de P em relação à λ por $d^2 - r^2$. Quando P é exterior à λ, sua potência em relação à λ é positiva; se P pertence à λ, sua potência é zero (pois, neste caso, $d = r$) e, se P é interior à λ, sua potência é negativa.

E se considerarmos duas circunferências (não concêntricas)? Que propriedade satisfaz a coleção de pontos que possuem mesma potência em relação a elas? Analise a ilustração a seguir, em que P é um ponto pertencente a esse lugar geométrico e M, o ponto médio entre os seus centros A e B, distantes entre si $2c$.



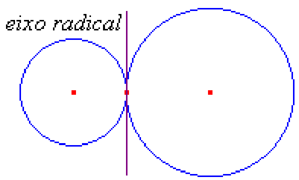
Isso posto: $PA^2 - R^2 = PB^2 - r^2$ ou $(c + x)^2 + h^2 - R^2 = (c - x)^2 + h^2 - r^2$.

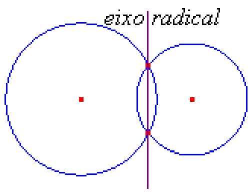
Daí: $4cx = R^2 - r^2$ ou $x = \frac{R^2 - r^2}{2AB}$.

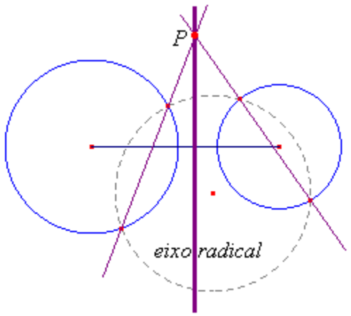
Note que esse valor de x é constante, pois os raios r e R das circunferências são fixos, bem como a distância AB entre seus centros. Isso significa que, para qualquer ponto P considerado, o pé da altura do triângulo APB é fixo sobre AB. Assim sendo, os pontos sobre essa altura têm a mesma dita propriedade que o ponto P.

Portanto, o lugar geométrico dos pontos que possuem mesma potência em relação a duas circunferências dadas é uma reta perpendicular à reta que passa pelos seus centros. Ele é denominado *eixo radical* das referidas circunferências. No caso de haver ponto em comum entre elas, pontos estes com potência nula em relação a cada uma, o eixo radical passa por esses pontos, naturalmente, como podemos observar nas ilustrações que se seguem.

Em ambos os casos, a construção geométrica do eixo radical é imediata. Já para o caso anteriormente estudado, é necessária uma construção auxiliar, como podemos verificar a seguir.







Inicialmente, construímos uma circunferência de modo que seja secante às duas primeiras. A seguir, traçamos os eixos radicais desta e de cada uma dada. Por fim, traça-se a perpendicular à reta que une os centros das primeiras circunferências, passando pelo ponto de encontro entre os eixos radicais recém-traçados. O ponto P tem a mesma potência às três circunferências e é chamado *centro radical* delas.

Referência Bibliográfica

- WAGNER, E. *Potência de um ponto em relação a uma circunferência.* RPM nº 45, SBM, São Paulo, 2001.

Observe que nesse *somatório* a variável é k. Então, após a aplicação da distributiva, verificamos que $(n + 1)$ é uma constante. Chamando de Q_n a soma dos quadrados dos n primeiros naturais e aplicando as devidas propriedades de *somatório*, ficamos com:

$$B_n = \sum_{k=1}^{n}\left[(n+1-k)k\right] = \sum_{k=1}^{n}\left[k(n+1)-k^2\right] = (n+1)\sum_{k=1}^{n}k - \sum_{k=1}^{n}k^2 =$$

$$= (n+1)S_n - Q_n = (n+1)\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \overset{\cdots}{=} \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Do exposto acima, observe que $B_n + Q_n = (n + 1)S_n$. Isso significa que a matriz de ordem $n\times(n + 1)$, cujas colunas são formadas pelos n primeiros naturais, tem a soma de todos os seus elementos igual ao número de blocos da n-ésima pilha adicionado à soma dos quadrados dos n primeiros inteiros positivos. E mais: as parcelas de B_n e Q_n podem ser convenientemente separadas por uma linha diagonal, conforme ilustrado ao lado, para o caso $n = 4$.

1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	4	4	4	4

Observação 2: O Princípio da Indução Finita pode ser usado nessa situação desde que conheçamos a expressão a ser provada. Assim sendo, admitindo $E_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$ como hipótese de indução, devemos então demonstrar que $E_{n+1} = \dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}$.

Verifique que $E_{n+1} = E_n + 1 + 2 + \ldots + n + n + 1$. Portanto:

$$E_{n+1} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \ldots = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}.$$

Questões: ***a)*** Da maneira como as pilhas foram apresentadas, não podemos ver alguns de seus blocos. Quantos deles existem na n-ésima figura? ***b)*** Qual é a área total da superfície da n-ésima pilha, considerando que cada bloco é um cubo com aresta unitária?

[*respostas na página 10*]

Empilhando blocos

Observe a sequência de figuras abaixo.

fig. 1

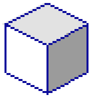


fig. 2

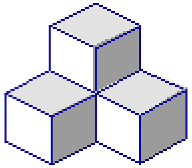
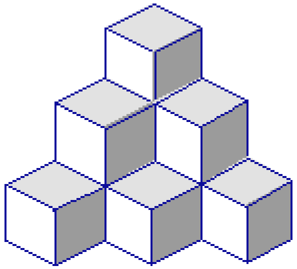
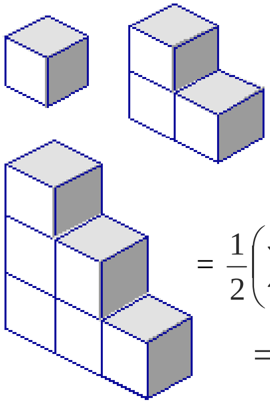


fig. 3



Quantos blocos existem na figura n?

Observe abaixo como podemos fragmentar, por exemplo, a terceira pilha. Nela há 1 + (1 + 2) + (1 + 2 + 3) blocos. Logo, na n-ésima pilha existem 1 + (1 + 2) + … + (1 + 2 + … + n) blocos.



Chamando $S_k = 1 + 2 + \ldots + k = \dfrac{k(k+1)}{2}$, para a n-ésima figura, teremos a seguinte quantidade de blocos: $S_1 + S_2 + \ldots + S_n =$

$$= \sum_{k=1}^{n} S_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}\cdot\sum_{k=1}^{n}(k^2+k) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}k^2 + \sum_{k=1}^{n}k\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\cdot\left(\frac{2n+1}{3}+1\right) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Observação 1: Analisando de outra maneira tal soma, a saber, 1 + (1 + 2) + … + (1 + 2 + … + n), que indicaremos por B_n, notamos que nela comparecem n parcelas iguais a 1; (n – 1) parcelas iguais a 2; …; 2 parcelas iguais a (n – 1) e 1 parcela igual a n. Logo, B_n vale:

$$n\cdot 1 + (n-1)\cdot 2 + (n-2)\cdot 3 + \ldots + 2\cdot(n-1) + 1\cdot n = \sum_{k=1}^{n}\left[(n+1-k)\cdot k\right]$$

Somatórios

Consideremos a seguinte soma: 2 + 5 + 10 + 17 + … + 82. Com um pouco de criatividade, podemos concluir que se trata da soma dos sucessores dos quadrados dos nove primeiros naturais. Em outras palavras, é a soma dos números da forma $k^2 + 1$, para k variando de 1 a 9. Tal soma tem uma representação matemática mais condensada, a saber: $\sum_{k=1}^{9}\left(k^2+1\right)$. O símbolo do *somatório* utilizado para tanto é a letra maiúscula grega *sigma*.

Seguem algumas propriedades de *somatórios*. Sendo α uma constante e $f(k)$ e $g(k)$ expressões em função da variável inteira k:

a) $\sum_{k=1}^{n}\left[\alpha\cdot f(k)\right] = \alpha\cdot f(1) + \alpha\cdot f(2) + \ldots + \alpha\cdot f(n) =$
$= \alpha\cdot[f(1) + f(2) + \ldots + f(n)] = \alpha\cdot\sum_{k=1}^{n} f(k)$

b) $\sum_{k=1}^{n}\alpha = \sum_{k=1}^{n}\left(\alpha\cdot 1^k\right) = \alpha\cdot 1 + \alpha\cdot 1 + \ldots + \alpha\cdot 1 =$
$= \alpha\cdot(1 + 1 + \ldots + 1) = \alpha\cdot n$

c) $\sum_{k=1}^{n} f(k) \pm \sum_{k=1}^{n} g(k) = f(1) + \ldots + f(n) \pm [g(1) + \ldots + g(n)] =$
$= f(1) \pm g(1) + \ldots + f(n) \pm g(n) = \sum_{k=1}^{n}\left[f(k) \pm g(k)\right]$

Exemplos:

a) $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n\cdot(n+1)}{2}$ (soma de P.A.)

b) $3\cdot 7^3 + 4\cdot 7^4 + \ldots + 15\cdot 7^{15} = \sum_{k=3}^{15}\left(k\cdot 7^k\right)$

c) $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^k} = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \ldots = 2$ (soma infinita de P.G.)

Princípio da Indução Finita

Tal método matemático consiste em poderosa ferramenta de comprovação de resultados envolvendo os números naturais. A vantagem de o utilizar está, geralmente, na economia de trabalho em se provar determinada propriedade. A desvantagem está na necessidade de prévio conhecimento da “fórmula” que se pretende demonstrar.

Esse princípio nos diz que, se determinada propriedade envolvendo naturais é válida para certo número natural k (condição inicial) e, o fato de esta propriedade valer para o natural n (hipótese da indução) implicar em ser também válida para $n + 1$, então tal propriedade será verdadeira para todo natural maior ou igual a k.

Vamos apresentar a seguir algumas aplicações e um exercício:

1 – Prove que a soma S_n dos n primeiros naturais ímpares é n^2.

Temos como condição inicial que $S_1 = 1 = 1^2$ e, por hipótese de indução, que $S_n = 1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1) = n^2$. Assim essas condições admitidas, temos que provar que $S_{n+1} = (n + 1)^2$. De fato:

$$S_{n+1} = \underline{1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)} + 2n + 1 = \underline{n^2} + 2n + 1 = (n + 1)^2.$$

2 – Prove a seguinte igualdade válida nos naturais:

$$S_n = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + ... + n\cdot(n + 1) = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{3}.$$

$$S_{n+1} = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{3} + (n + 1)\cdot(n + 2) = \frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}{3}.$$

3 – Demonstre que $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \dfrac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$.

Demonstremos esse fato de duas maneiras: por *somatórios* e por indução finita:

a) por *somatórios*

É sabido que, para todo k: $(k + 1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$.

Aplicando o *somatório* em ambos os membros dessa igualdade e utilizando suas propriedades, obtemos:

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3 = \sum_{k=1}^{n}k^3 + 3\cdot\sum_{k=1}^{n}k^2 + 3\cdot\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}1$$

Agora, note que: $\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3 = \sum_{k=1}^{n}k^3 - 1^3 + (n + 1)^3$. Desta forma: $\sum_{k=1}^{n}k^3 - 1 + (n + 1)^3 = \sum_{k=1}^{n}k^3 + 3\cdot\sum_{k=1}^{n}k^2 + 3\cdot\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}1$.

Então, sendo $S_n = \sum_{k=1}^{n}k^2$, $\sum_{k=1}^{n}k = \dfrac{n\cdot(n+1)}{2}$ e $\sum_{k=1}^{n}1 = n$,

$$3S_n = (n + 1)^3 - (n + 1) - \frac{3n\cdot(n+1)}{2}. \text{ Daí: } S_n = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}.$$

b) por indução

A provar: $S_{n+1} = \dfrac{(n+1)(n+2)[2(n+1)+1]}{6} = \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.

$$S_{n+1} = S_n + (n + 1)^2 = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6} + (n + 1)^2.$$

Daí: $S_{n+1} = (n + 1)\cdot\dfrac{n\cdot(2n+1)+6\cdot(n+1)}{6} = \dfrac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$.

Fatorando o trinômio, ficamos com $S_{n+1} = \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.

4 – Prove que $2^n - 1$ é múltiplo de 3, para todo número natural n par.

Verificada a condição inicial para $n = 2$ e admitindo, por hipótese de indução, que $2^n - 1 = 3k$, com k inteiro e n par, provemos essa proposição para o próximo número par, ou seja, para $n + 2$.

$2^{n+2} - 1 = 4\cdot 2^n - 1 = 4\cdot 2^n - 4 + 4 - 1 = 4\cdot(2^n - 1) + 3 = 4\cdot 3k + 3$, que é claramente múltiplo de 3.

Exercício: Provar que $n! > 2^n$ para todo n natural maior que 3.