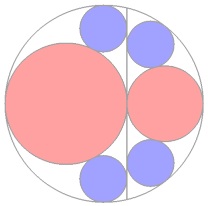
Conteúdo



Edição, ilustrações, seções e artigos não assinados: Calixto Garcia

Revisão: Cármen Silvia P. S. de Lima

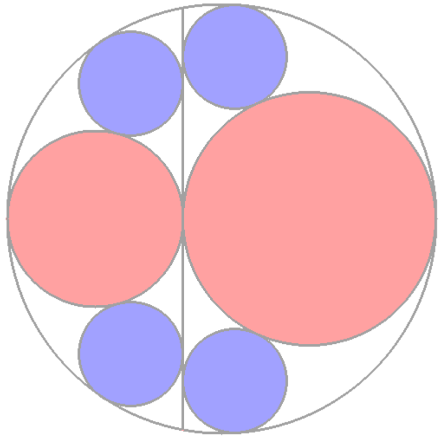
Esta edição está composta em *.doc*, fonte *Times New Roman*, corpo *12*

Contatos: – *Colégio Absoluto - Anglo:*
Rua Antonio Nery, 550, Tietê, SP; A/C Prof. Calixto Garcia

– *E-mail - Prof. Calixto Garcia:*
klixg@yahoo.com.br

RMCA

REVISTA DE MATEMÁTICA DO COLÉGIO ABSOLUTO



08

2º bimestre
2009

Ao Leitor

Chegamos ao final da primeira edição da **OMCA**. Parabenizamos os participantes das aulas de treinamento, em especial os qualificados para a segunda e última fase. Temos certeza de que essa atividade, entre outros benefícios a oferecer, vem munindo-os de ferramentas alternativas para o enfrentamento de situações-problema da Matemática, também muito úteis em seus futuros vestibulares.

A Olimpíada de Matemática da Unicamp terá início em breve. Contamos com a participação de alunos nossos nesse torneio.

Neste número, recebemos a contribuição de um leitor de nossa revista. Agradecemos imensamente a sua colaboração.

Boa leitura!

Calixto Garcia

As equações algébricas e os complexos

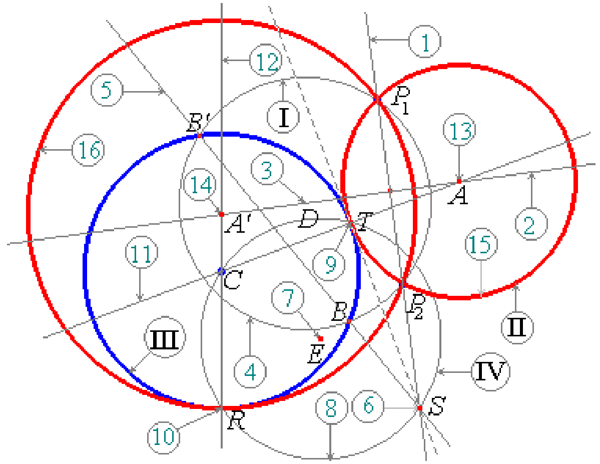
Diversas situações-problema em Matemática envolvem, direta ou indiretamente, equações algébricas. Ao longo da história, a necessidade de se apresentarem formalmente as soluções dessas equações, de uma forma ou outra, levou à ampliação dos conjuntos numéricos.

O presente artigo relata o episódio da invenção dos números complexos, ou seja, dos números do tipo $a + bi$, com $i = \sqrt{-1}$.

Embora muitos presumam, não foram as equações quadráticas as responsáveis pela criação desse conjunto. Encontramos evidências do aparecimento dessas equações datadas de cerca de 1700 a.C. Até o século XVI, quando conduziam a radicais quadrados de números negativos, significava que o problema associado não tinha solução.

$$= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} = (n+1)^2 \cdot \frac{n^2 + 4(n+1)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{2^2}.$$

3 – A sequência da construção está indicada na figura. Analisando a figura pronta, temos que P_1P_2 é eixo radical de I e II, assim como *BB’* é de I e III. Então *S* pertence ao eixo radical de II e III e é centro radical dessas circunferências. Daí, *S* pertence à tangente entre elas. Esse ponto de tangência *T* é obtido da intersecção entre III e IV, com diâmetro *CS* (o triângulo *CTS* é retângulo em *T*). O centro *A* de uma das circunferências procuradas está na mediatriz de P_1P_2 e em *CT*. O leitor pode observar que o centro *A’* da outra se obtém de modo análogo.



Problemas propostos

1 – Um quadrilátero de área $2\sqrt{10}$ cm^2 está inscrito em uma circunferência. Seus lados medem $x – 2$, $x – 1$, $x + 1$ e $x + 2$. Obter x.

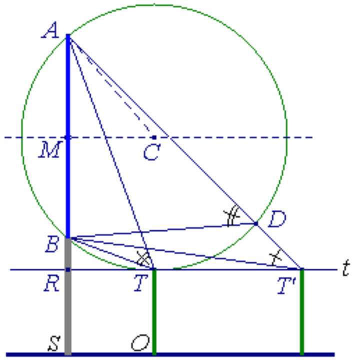
2 – Na página 6 desta revista aparece a expressão matemática $n(n+1)(n+2)(n+3)/24$. Prove que esse quociente representa um número inteiro, para n inteiro.

3 – (*desafio*) Resolver no conjunto dos complexos a equação $y^4 – 5y – 6 = 0$.

Problemas

Resolução dos problemas propostos no número anterior

1 – A posição do observador, de modo que o ângulo de visão α seja o maior possível, baseia-se na construção abaixo, sendo A o topo da estátua, B o pé da estátua e t a reta horizontal na altura dos seus olhos. Para um observador com a cabeça em T', não coincidente com T, temos que o ângulo $AT'B$ é menor que o ângulo ATB uma vez que $ADB = ATB$ e que $ADB = AT'B + DBT'$.



Determinar geometricamente a posição do observador TO, consiste em construir uma circunferência que passe por A e B e seja tangente à reta t, paralela ao solo e dele distando a medida da altura do observador, como mostra o esboço pronto acima. Para tanto, traça-se a mediatriz de AB e, sendo M ponto médio de AB, traça-se uma circunferência centrada em A (ou B) e de raio MR (que mede o mesmo que CT). Essa circunferência intercepta a mediatriz em C, centro da circunferência procurada.

Agora, se $SO = 15$ m, $BS = 8$ m e $TO = 1{,}75$ m, temos que RT e RA são, nessa ordem, retas tangente em T e secante em A e B à tal circunferência. Sendo $x = AB$, da potência do ponto R: $RT^2 = RB.RA$, ou $15^2 = (8 - 1{,}75)(8 - 1{,}75 + x)$. Daí: $x = 29{,}75$ m é a altura estimada da estátua do Cristo Redentor.

2 – Provemos esse resultado pelo Princípio da Indução Finita. Tendo $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = [n\cdot(n+1)/2]^2$ como hipótese de indução, vamos mostrar que $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = [(n+1)\cdot(n+2)/2]^2$:

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = n^2\cdot(n+1)^2/4 + (n+1)^3 =$$

Na época da Renascença, um grupo de matemáticos italianos buscava por uma fórmula matemática que fornecesse as soluções para equações algébricas de 3º grau em função de seus coeficientes, tal qual a célebre fórmula para se obter as raízes de uma equação quadrática. O fruto desse trabalho foi a publicação de um importante livro de Álgebra, o *Ars Magna* de Gerônimo Cardano [1501 – 1576]. Nela, divulgam-se estudos de Niccolo Fontana (*Tartaglia*) [1500 – 1557], entre outros, e apresenta-se a tão sonhada fórmula.

O leitor pode acompanhar com calma o caminho trilhado para construí-la. Cabe aqui ressaltar que as equações estudadas tinham a forma incompleta, sem o termo quadrático, sendo sempre possível reduzi-las nessa forma.

De fato, se considerarmos inicialmente a equação cúbica $y^3 + ay^2 + by + c = 0$, mediante a substituição $y = x + k$, ficamos com $x^3 + (3k + a)x^2 + (3k^2 + 2ak + b)x + k^3 + ak^2 + bk + c = 0$. Agora, fazendo $k = -a/3$, torna-se uma equação do tipo $x^3 + px + q = 0$. Assim, por exemplo, na equação $y^3 + 3y^2 + 6y - 10 = 0$, observe que $a = 3$ e, portanto, devemos ter $k = -1$. Realizando, então, a mudança de variável $y = x - 1$, ficamos com $x^3 + 3x - 14 = 0$.

Se fizermos $x = m + n$ na equação $x^3 + px + q = 0$, obteremos $(m + n)^3 + p(m + n) + q = 0$ que, comparando com a identidade $(m + n)^3 - 3mn(m + n) - m^3 - n^3 = 0$, ficamos com $p = -3mn$ e $q = -m^3 - n^3$, ou seja, com $mn = -p/3$ e $m^3 + n^3 = -q$.

Estamos agora diante de dois números $u = m^3$ e $v = n^3$ com: $u + v = -q$ e $u.v = (-p/3)^3 = -(p/3)^3$. Resolvendo esse sistema de equações nas variáveis u e v, chegamos à equação $u^2 + qu - (p/3)^3 = 0$, quadrática, com uma raiz u sendo igual a:

$$-\frac{1}{2}q + \frac{1}{2}\sqrt{q^2 + 4\left(\frac{p}{3}\right)^3} = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Chamando o radicando de E, e sabendo que $v = -q - u$, escrevemos $u = -\frac{q}{2} + \sqrt{E}$ e $v = -q + \frac{q}{2} - \sqrt{E}$, ou $v = -\frac{q}{2} - \sqrt{E}$.

Agora, como $u = m^3$ e $v = n^3$, segue que:

$$m = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{E}} \text{ e que } n = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{E}}.$$

E como $x = m + n$, então:

$$\boxed{x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{E}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{E}}}, \text{ onde } E = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3.$$

O *Ars Magna* de Cardano inspirou Raphael Bombelli [1526 – 1573] a escrever a obra *l'Álgebra*, que trata do mesmo assunto, porém com uma linguagem mais acessível.

Estudando a equação $x^3 = 15x + 4$ e sabendo de antemão que 4 é uma de suas raízes, Bombelli obteve pela fórmula anterior: $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$. Decidiu levar em frente o trabalho com o símbolo estranho $\sqrt{-121}$, concebendo que as parcelas de x eram do tipo $a \pm \sqrt{-b}$, ou seja, que $(a \pm \sqrt{-b})^3 = 2 \pm \sqrt{-121}$. Dessa forma, $x = a + \sqrt{-b} + a - \sqrt{-b} = 4$ e, daí, $a = 2$. Aplicando--se a mesma álgebra a esses novos símbolos, obteve $b = 1$ como resultado da equivalência entre $(2 + \sqrt{-b})^3$ e $2 + \sqrt{-121}$. Resumindo, concluiu que $\sqrt[3]{2 \pm \sqrt{-121}} = 2 \pm \sqrt{-1}$ e, portanto, que a solução esperada podia ser expressa por $x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$.

Foi a partir dessa concepção que se verificou a necessidade de assumir a existência dessa nova categoria de símbolos. Assim, deu-se início ao processo de acolhimento dos complexos ou imaginários (como hoje são denominados) no seio da Matemática.

Eles encontraram aplicações em especial na Física, sobretudo após ganharem a forma trigonométrica e representação gráfica.

Referência Bibliográfica

- EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. Editora da UNICAMP, Campinas, 2004.

$$A = \frac{(a.b+c.d)}{2}\sqrt{1-\left(\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(a.b+c.d)}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{(a.b+c.d)^2}{4}\left(\frac{4(a.b+c.d)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{4(a.b+c.d)^2}\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{(2a.b+2c.d)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{16}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(2ab+2cd+a^2+b^2-c^2-d^2)(2ab+2cd-a^2-b^2+c^2+d^2)}{16}} =$$

$$= \sqrt{\frac{[(a+b)^2-(c-d)^2]\cdot[(c+d)^2-(a-b)^2]}{16}} =$$

$$= \sqrt{\frac{a+b+c-d}{2}\cdot\frac{a+b-c+d}{2}\cdot\frac{c+d+a-b}{2}\cdot\frac{c+d-a+b}{2}}.$$

Note agora o que será feito com o primeiro fator sob o radical:

$\frac{a+b+c-d}{2} = \frac{a+b+c+d-2d}{2} = \frac{a+b+c+d}{2} - d = p - d$, onde p é o semiperímetro do quadrilátero em questão.

Essa manipulação algébrica pode ser realizada de maneira análoga em cada um daqueles fatores. Com isso, a referida área fica assim escrita:

$$A = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}, \text{ com } p = \frac{a+b+c+d}{2}.$$

Referência Bibliográfica

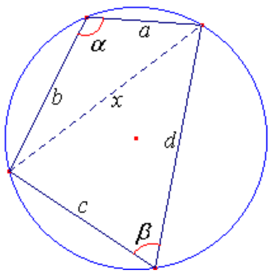
- MACEDO, A.; GOMES C. A. *Heron para quadriláteros…Brahmagupta* RPM nº 64, SBM, São Paulo, 2007.

Área de quadrilátero inscritível

Rafael R. Sencio

Brahmagupta foi um matemático e astrônomo indiano nascido em Bhinmal em 589 d.C. e falecido em 668. Considerado pai da Aritmética, da Álgebra e da Análise Numérica, Brahmagupta popularizou o conceito do zero e definiu regras para a aritmética com os números negativos e com o zero, além de escrever textos matemáticos sobre operações fundamentais como adição, subtração, multiplicação e divisão, contidos num texto matemático chamado *Brahmasputha Siddhanta*.

Uma importante contribuição de Brahmagupta para a Geometria foi o desenvolvimento de uma expressão que resulta na área de um quadrilátero de lados *a*, *b*, *c* e *d* inscrito numa circunferência, cuja demonstração é feita a seguir:



Dividindo o quadrilátero em dois triângulos, como indicado ao lado, temos que: $A = \dfrac{a.b.sen\alpha}{2} + \dfrac{c.d.sen\beta}{2}$ e, da lei dos co-senos, $x^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.cos\alpha = c^2 + d^2 + 2.c.d.cos\beta$.

Como α e β são ângulos suplementares, então: $sen\beta = sen\alpha$ e $cos\beta = -\,cos\alpha$.

Logo, temos: $A = \dfrac{a.b.sen\alpha}{2} + \dfrac{c.d.sen\alpha}{2} = \dfrac{(a.b+c.d)sen\alpha}{2}$ (*) e $a^2 + b^2 - 2.a.b.cos\alpha = c^2 + d^2 + 2.c.d.cos\alpha$. Dessa equação resulta:

$$cos\alpha = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(a.b+c.d)}, \text{ ou } sen\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(a.b+c.d)}\right)^2} \quad (**),$$

após utilização da relação fundamental $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$.

Substituindo (**) em (*), ficamos com:

Os logaritmos

Não é difícil obter o expoente *x* em $3^x = 243$. Basta perceber que 243 é uma potência de 3 e de expoente inteiro, a saber, 3^5. Entretanto, descobrir o expoente *x* tal que $2^x = 7$ implica em procurar por uma potência de base 7 que esteja próxima de uma de base 2. Com uma calculadora simples, pode-se verificar que $2^{14} = 16384$ está relativamente perto de $7^5 = 16807$. Daí, podemos dizer que $2^{14} \cong 7^5$, ou que $2^{14/5} \cong 7$, ou, ainda, que $2^{2,8} \cong 7$. O leitor pode encontrar um valor aproximado para *x* na equação $2^x = 10$, valendo-se dessa idéia, ou seja, de procurar por potências de 2 e de 10 que estejam próximas, devendo chegar a $x \cong 0,3$. Esse expoente é chamado *logaritmo*.

O estudo dos logaritmos não nasceu da simples precisão de expressar a solução de equações exponenciais como essas acima. Foi decorrente da necessidade de simplificar cálculos astronômicos da época. Até então, esses cálculos eram auxiliados pelas regras de *prostaférese* (palavra de origem grega que significa adição e subtração), isto é, por fórmulas que transformam produtos ou divisões em somas ou diferenças. A Trigonometria no século XVI, já muito desenvolvida, fornecia esse tipo de fórmula, tal como, por exemplo: $\cos x \cdot \cos y = \dfrac{\cos(x+y)}{2} + \dfrac{\cos(x-y)}{2}$. Assim, para se efetuar a multiplicação de 12,345 por 678,9, obtém-se, com a ajuda de uma tabela de co-senos, os valores de *x* e de *y* para os quais se verifica: $\cos x = 0,12345$ e $\cos y = 0,6789$, a saber, $x \cong 82,9087$ e $y \cong 47,2422$. Novamente, da tábua de co-senos, obtém-se o valor de cada parcela da fórmula, a saber, respectivamente iguais a $-\,0,3224$ e 0,4062. A soma 0,0838, após um reajuste em suas casas decimais, fica 8380, bem próxima do produto proposto.

Esse engenhoso método de redução de um produto a um simples problema de adição inspiraria, de maneira independente, os trabalhos de John Napier e de Jobst Bürgi no início do séc. XVII, entretanto, sob concepções bem diferentes das regras da *prostaférese*.

Basicamente, construíam tabelas associadas a progressões aritméticas e geométricas, como exemplificado a seguir:

L	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096

Para se obter, por exemplo, o produto de 32 por 128, recorre-se à tabela, verificando que estão associados aos expoentes 5 e 7. A soma deles é 12, associada a 4096, resultado do referido produto. Note que $\log_2(32\cdot128) = \log_2 32 + \log_2 128 = 5 + 7 = 12 = \log_2 4096$.

Para que a tabela se preste a fornecer maior quantidade de produtos ou quocientes, é necessário que os números da 2ª linha estejam mais próximos uns dos outros. E isso se consegue fazendo com que o 1º termo dessa linha esteja suficientemente próximo de 1. Assim, Napier escolheu para ele $1 - 10^{-7} = 0{,}9999999$. Para evitar decimais, multiplicou cada potência assim criada por 10^7. Desse modo, o logaritmo neperiano L de N é tal que $N = 10^7(1 - 1/10^7)^L$.

Devido à pouca praticidade em lidar com essas bases, o matemático britânico Henry Briggs propôs à Napier a mudança para a base decimal, em que log 1 = 0 e log 10 = 1. Em comum acordo, Briggs pôs-se a construir as primeiras tábuas de logaritmos comuns, as quais resistiram até décadas atrás, sendo então superadas pelo uso das calculadoras científicas de custo acessível.

O logaritmo, ou *número de razão*, como significa, dada às suas propriedades, simplificou bastante o trabalho, sobretudo dos astrônomos da época. As tábuas de logaritmos e as réguas de cálculo logarítmicas são produtos dessa invenção que caíram em desuso. Porém, o logaritmo como função, transformou-se em poderosa ferramenta no estudo de variações de grandezas, tais como a energia liberada por um terremoto, a energia luminosa recebida pelo olho, o nível de ruído que ouvimos, o PH das substâncias, entre outras.

Referência Bibliográfica

- EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. Editora da UNICAMP, Campinas, 2004.

Ainda sobre as pilhas de blocos

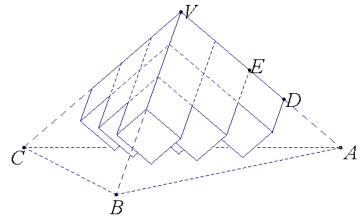
Em artigo da edição anterior, estudamos algumas particularidades acerca de uma sequência de pilhas de blocos. Exploraremos aqui mais algumas propriedades que ela possui.

Ficamos sabendo que precisamos de $N_k = k(k+1)(k+2)/6$ blocos para construir a figura k. O cálculo do total T_n de blocos que necessitamos para as n primeiras pilhas é, então, dado por:

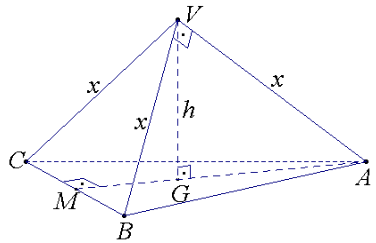
$$T_n = \sum_{k=1}^{n} N_k = \frac{1}{6}\cdot\sum_{k=1}^{n}(k^3 + 3k^2 + 2k) = \frac{1}{6}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} k^3 + 3\cdot\sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\cdot\sum_{k=1}^{n} k\right)$$

O leitor está convidado a desenvolver cada uma das três parcelas dessa soma, em que a primeira exige o resultado do exercício proposto de número **2** da revista anterior, na seção ***problemas***. Deverá chegar em $T_n = n(n+1)(n+2)(n+3)/24$.

Imaginando agora cada pilha com os blocos contíguos colados, todos com aresta de medida unitária, qual é a altura da n-ésima figura posicionada de modo a se apoiar em sua parte não plana?



Note, nas figuras seguintes, o tetraedro trirretângulo $VABC$, cuja base é um triângulo equilátero, e as faces laterais, triângulos isósceles retângulos. O pé de sua altura é baricentro da base.



Sendo $VA = VB = VC = x$ e G o pé da altura h da pirâmide, temos:

$AB = x\sqrt{2}$; $AM = AB\sqrt{3}/2 = x\sqrt{6}/2$ e $AG = AM\cdot 2/3 = x\sqrt{6}/3$.

No ΔAGV, x vale $h\sqrt{3}$. Para $n = 1$, $h = \sqrt{3}$. Daí $x = AE = 3$ e $AD = 2$. Para a figura n: $x = n + 2$ e $h = (n+2)/\sqrt{3} = (n+2)\sqrt{3}/3$.