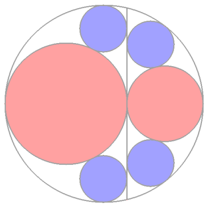
Conteúdo



Edição, ilustrações, seções e artigos não assinados: Calixto Garcia

Revisão: Cármen Silvia P. S. de Lima

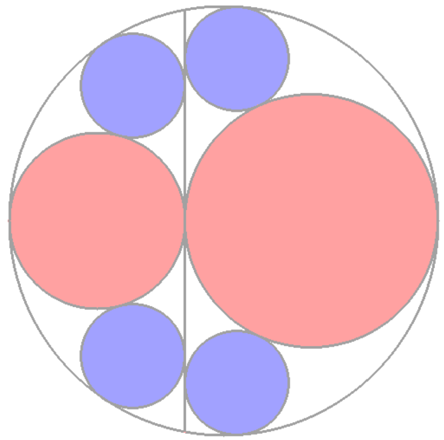
Esta edição está composta em *.doc*, fonte *Times New Roman*, corpo *12*

Contatos: – *Colégio Absoluto - Anglo:*
Rua Antonio Nery, 550, Tietê, SP; A/C Prof. Calixto Garcia

– *E-mail - Prof. Calixto Garcia:*
klixg@yahoo.com.br

RMCA

REVISTA DE MATEMÁTICA DO COLÉGIO ABSOLUTO



09

3º bimestre

2009

Ao Leitor

Nossa revista está completando dois anos. Temos a satisfação em ter criado um canal de ligação entre a Matemática e o aluno que tem por ela uma afinidade especial. Temos também a satisfação em contar com a preciosa colaboração de nossa revisora Cármen Silvia.

Quando inspirados em fontes, nossos artigos fazem referências a conteúdos de boas literaturas, entre as quais, a conceituada RPM, Revista do Professor de Matemática, publicada pela SBM, Sociedade Brasileira de Matemática. Abordamos assuntos motivados por situações do cotidiano, curiosidades, temas incomuns dos currículos escolares etc., não raro, sob o tempero da história.

Boa leitura!

Calixto Garcia

A matemática do financiamento

Quando adquirimos um produto cujo pagamento é realizado em parcelas, a soma destas é normalmente maior que o seu preço à vista. Isso se deve à diferença entre o valor monetário dele hoje e no futuro, como ressaltado em artigo da **RMCA 02**. Essa diferença é o juro que, expresso em porcentagem, denominamos *taxa de juro*. Esse texto objetiva explorar a matemática envolvida num financiamento.

Por exemplo, para um empréstimo de 20 mil reais a ser pago em 24 parcelas mensais fixas, com entrada, à taxa de juros de 2% ao mês, calculemos o valor de cada prestação.

A tabela a seguir mostra as prestações *P* aplicadas em diferentes momentos transformando-se em diferentes valores com o passar dos meses. A soma dos valores da última coluna deve constituir a quantia financiada corrigida que se obtém após 24 meses.

Problemas propostos

1 – João guardou, mensalmente, a quantia de 300 reais em um banco que o remunerou à taxa de 0,8% ao mês durante 1 ano. O montante acumulado foi usado como entrada para a compra de um televisor que custava 5000 reais à vista. O saldo devedor ele financiou em 6 parcelas mensais fixas à taxa de 3% ao mês. Qual é o valor de cada uma dessas parcelas? [Dados: $1{,}008^{12} \cong 1{,}1$ e $1.03^{6} \cong 1{,}19$]

2 – Um mata-moscas está a 1m de uma parede e inicia um movimento em direção a ela a 0,5m/s. Nesse instante, uma mosca na parede põe-se a voar, tocando o mata-moscas e a parede alternadamente, com velocidade de 2m/s, na mesma direção do movimento deste. Qual é a distância, em centímetros, percorrida pela mosca até que retorne à parede pela 3ª vez? Qual é (teoricamente) a distância que a mosca percorrerá até ser esmagada pelo mata-moscas?

3 – (*desafio*) Um plano secciona uma esfera dada de raio 5cm, dando origem a duas calotas esféricas. Consideremos a maior esfera inscrita em cada uma dessas calotas. Obter o raio dessa secção, sabendo que o volume da região exterior às duas esferas inscritas e interior à esfera dada vale $20\pi \text{cm}^3$.

Curiosidade: Quadrados palíndromos

Observe o que acontece com esses pares de números quadrados: $12^2 = 144$ e $21^2 = 441$; $13^2 = 169$ e $31^2 = 961$; $112^2 = 12544$ e $211^2 = 44521$; $103^2 = 10609$ e $301^2 = 90601$. Notou que esses pares de quadrados são palíndromos, assim como suas respectivas raízes quadradas? Verifique que esse fato sempre acontecerá quando, no cálculo do quadrado (pelo algoritmo usual da multiplicação), não ocorrer produto ou soma maior que 10. Vamos batizar os números com essa propriedade de *quadrados palíndromos*. Você é capaz de dizer quantos são os quadrados palíndromos com raiz quadrada menor que 10000?

Problemas

Resolução dos problemas propostos no número anterior

1 – Com $a = x - 2$, $b = x - 1$, $c = x + 1$ e $d = x + 2$, temos que $p = \frac{a+b+c+d}{2} = \frac{4x}{2} = 2x$. Daí: $p - a = x + 2$, $p - b = x + 1$, $p - c = x - 1$ e $p - d = x - 2$. Portanto, a área desse quadrilátero, dada por $A = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, fica assim: $A = \sqrt{(x^2-4)(x^2-1)}$. Como $A = 2\sqrt{10}$ cm², então $(x^2 - 4)(x^2 - 1) = 40$. Essa equação fornece a única raiz real admissível para o problema: $x = 3$cm.

2 – A sentença $n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$, para n inteiro, é produto de quatro números inteiros consecutivos. Então, entre eles há ao menos um fator múltiplo de 3, há exatamente um múltiplo de 2 que não é múltiplo de 4 (*) e há exatamente um múltiplo de 4 (**). Daí esse produto pode ser escrito assim: $2\cdot 3\cdot 4\cdot k = 24\cdot k$, com k inteiro.

(*) e (**) constituem P.As. disjuntas de razão 4. Por isso, em uma coleção de quatro números inteiros consecutivos, um termo (e só um) de cada uma dessas sequências está presente nessa coleção.

3 – O polinômio $y^4 - 5y - 6$ é divisível por $y + 1$ e por $y - 2$, ou seja, apresenta -1 e 2 como raízes, pois pode ser assim fatorado:

$$\begin{aligned}
y^4 - 5y - 6 &= y^4 - y^2 + y^2 - 5y - 6 = y^2(y^2 - 1) + (y - 6)(y + 1) = \\
&= y^2(y - 1)(y + 1) + (y - 6)(y + 1) = (y + 1)(y^3 - y^2 + y - 6) = \\
&= (y + 1)(y^3 - 8 - y^2 + y + 2) = (y + 1)[y^3 - 8 - (y^2 - y - 2)] = \\
&= (y + 1)[(y - 2)(y^2 + 2y + 4) - (y - 2)(y + 1)] = \\
&= (y + 1)[(y - 2)(y^2 + 2y + 4 - (y + 1)] = (y + 1)(y - 2)(y^2 + y + 3).
\end{aligned}$$

As outras duas raízes, da equação $y^2 + y + 3$, são complexas, a saber: $y' = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{11}}{2}i$ e $y'' = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{11}}{2}i$.

mês	1º	2º	3º	…	24º	final
capital	P	$P\cdot 1{,}02$	$P\cdot 1{,}02^2$	…	$P\cdot 1{,}02^{23}$	$P\cdot 1{,}02^{24}$
		P	$P\cdot 1{,}02$	…	$P\cdot 1{,}02^{22}$	$P\cdot 1{,}02^{23}$
			P	…	$P\cdot 1{,}02^{21}$	$P\cdot 1{,}02^{22}$
					…	…
					P	$P\cdot 1{,}02$

A soma dos valores da última coluna (*final*) deve, portanto, ser igual a $20000\cdot 1{,}02^{24}$:

$$P\cdot(1{,}02 + 1{,}02^2 + \ldots + 1{,}02^{24}) = 20000\cdot 1{,}02^{24} \cong 32168{,}74.$$

A soma entre os parênteses é de P.G. e vale:

$$S_{24} = 1{,}02\cdot\frac{1{,}02^{24} - 1}{1{,}02 - 1} \cong 31{,}03.$$

Daí, $P\cdot 31{,}03 = 32168{,}74$ e, então, $P = 1036{,}70$ reais.

O valor de cada parcela pode ser ligeiramente maior que o calculado devido a eventuais taxas inerentes a essa modalidade de pagamento.

Muitas vezes lhe é oferecido o valor das parcelas para certo financiamento. Matematicamente falando, é tarefa complicada calcular a taxa de juros nessa operação financeira. Isso porque a equação envolvida não tem resolução simples.

Imaginemos uma situação em sentido inverso à criada pelo exemplo anterior, por assim dizer, em que o valor a se financiar em 10 meses é de 5600 reais, sendo pago em parcelas de 640 reais. A equação que surge e que fornece o valor da taxa de juros i é dada por:

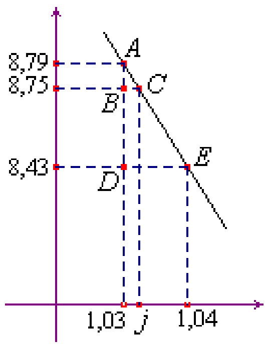
$$640 \cdot j \cdot \frac{j^{10}-1}{j-1} = 5600 \cdot j^{10}, \text{ ou por } \frac{j^{10}-1}{j^{10}-j^{9}} = 8{,}75, \text{ onde } j = 1 + i.$$

A propósito, chamando o valor a ser financiado de M e as n prestações iguais de P, podemos generalizar essa situação com a fórmula: $\frac{j^n-1}{j^n-j^{n-1}} = \frac{M}{P}$, com $j = 1 + i$, sendo i a taxa de juros.

Para resolver a equação em questão, vamos atribuir valores razoáveis para j, observando que, quanto menor ele for, maior é o quociente $q = \frac{j^{10}-1}{j^{10}-j^{9}}$, que deve se aproximar de 8,75, conforme pode ser verificado na tabela a seguir:

j	*q*
1,05	8,11
1,04	8,43
1,03	8,79

O valor mais próximo da taxa de juros fornecido pela tabela é 3%. Para se conseguir maior precisão para o valor dessa taxa, podemos utilizar o método da *interpolação linear*. Essa técnica consiste em assumir uma variação linear da função q na vizinhança do ponto que contém ordenada 8,75. Como consequência, j é obtido na equação abaixo, que surge da semelhança entre os triângulos ABC e ADE da figura ao lado:



$$\frac{8{,}79-8{,}43}{1{,}04-1{,}03} = \frac{8{,}79-8{,}75}{j-1{,}03} \rightarrow j \cong 1{,}031. \text{ Então,}$$

a taxa de juros é mais precisamente de 3,1%.

Planilhas eletrônicas podem calculá-la de modo iterativo ou diretamente utilizando-se de função apropriada, tal qual em uma calculadora financeira.

Tão interessante quanto o cálculo das prestações e taxas de juros é a importância de verificar se os valores declarados pelo vendedor são os realmente praticados numa transação comercial.

Note que a aritmética dos inteiros é um assunto presente na grande maioria dos problemas, mesmo os que envolvem Geometria. Essa é uma característica de questões de olimpíadas de Matemática. Um ponto importante a se explorar nesse caso é a paridade dos inteiros envolvidos, isto é, a propriedade de serem ou não divisíveis por dois. Outra característica de problemas olímpicos é a exigência do domínio de técnicas algébricas, especialmente da fatoração.

Sob esses aspectos, a questão 8 é um caso exemplar. Depois de expressar o número a como um par, ou seja, escrevê-lo da forma $2k$, com k inteiro, devemos substituí-lo em $2a^2 + 12a$, obtendo-se a expressão $8k^2 + 24k$ que, fatorada, fica assim: $8 \cdot k \cdot (k + 3)$. Note que a parte literal dessa última expressão é par pois é produto de fatores com paridades distintas (ou k ou $k + 3$ é par). Daí $k \cdot (k + 3)$ pode ser escrito da forma $2w$, com w inteiro. Com isso $2a^2 + 12a$ assume a forma $16 \cdot w$, caracterizando um múltiplo de 16.

A criatividade, quando não essencial, é importante na velocidade do desencadeamento de um problema, como o de número 6. Na figura geométrica espacial em questão, com dimensões a, b e c, temos, segundo suas condições, que $ab = 10$, $ac = 12$ e $bc = 30$. Ao invés de se calcular a medida de cada dimensão dessa figura, é mais criativo e menos trabalhoso multiplicar essas três equações. O resultado disso, a saber, $a^2b^2c^2 = 3600$, é precisamente o quadrado do volume V pretendido. Assim, $V = 60$ cm^3.

Propositadamente são apresentadas questões aparentemente não imediatas. Um exame cuidadoso da situação exposta pode conduzir a uma resolução mais simples e direta. Desse modo se comporta a questão 9. Sua solução se revela simples quando se dá conta de que as diagonais de um retângulo têm mesma medida. Daí, o raio do setor em questão mede 13 cm e, como $AB = 5$ cm, BE deve medir 8 cm.

Além desses atributos, também exploram conteúdos acessíveis a todos os participantes, ao mesmo tempo em que prestam auxílio ao currículo escolar regular, revisando ou introduzindo conceitos.

I OMCA

Como se pôde perceber nessa primeira edição da OMCA, a intenção em promover esse torneio é de proporcionar uma aproximação entre o participante e a Matemática, sobretudo durante seu treinamento. Esse propósito é legitimado pelo nível de complexidade das questões trabalhadas, sendo os problemas cuidadosamente selecionados para que seu arremate seja prazeroso.

Eis as questões que fizeram parte de provas do nível II, exceto a última, que apareceu em prova do nível I:

1 – Se existirem, encontre m e n inteiros tais que $2^n - 2^m = 127$.

2 – Há quantos triângulos com lados de medidas inteiras 3, 4 e x?

3 – Encontre um número natural que somado com 224 resulta num quadrado, e que somado com 300 resulta em outro quadrado.

4 – Qual é a distância entre os centros das circunferências inscrita e circunscrita ao triângulo de lados com medidas 6 cm, 8 cm e 10 cm?

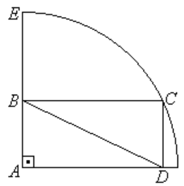
5 – Um quadrilátero convexo tem lados com medidas 5 cm, 4 cm, 8 cm e $(5x - 3)$ cm, sendo esta última a maior delas. Se x é inteiro, obter o perímetro desse quadrilátero.

6 – Num paralelepípedo reto-retângulo, as áreas das faces que possuem um vértice em comum valem 10 cm^2, 30 cm^2 e 12 cm^2. Qual é a medida do volume dessa figura?

7 – Os centros de 3 circunferências, tangentes duas a duas, são vértices de um triângulo cujos lados medem 6 cm, 8 cm e 10 cm. Determine seus raios.

8 – Seja a um número par. Mostre que $2a^2 + 12a$ é múltiplo de 16.

9 – O retângulo $ABCD$ está inscrito em um quarto de uma circunferência como ilustra a figura ao lado. Se a diagonal BD mede 13 cm e o lado AB mede 5 cm, qual é a medida do segmento BE?



A Matemática e o matemático

A Matemática é uma ciência que o homem sempre buscou desenvolver organizada e consistentemente. Desde o início de sua sistematização, na antiguidade, resultados vão a ela se incorporando com o constante cuidado de verificar a existência de pontos conflitantes com as proposições já demonstradas, aceitas como verdades. Os tijolos desse grande castelo são assentados um a um, todos sobre uma base sólida que constitui o que se chama *sistema axiomático*, composto de verdades evidentes por si mesmas. Essa atenção no processo de seu desenvolvimento faz da Matemática uma ciência única, no sentido de disponibilizar teoremas milenares aplicados a situações práticas atuais, além de abordados em currículo escolar.

Ao longo da história, muitos foram os responsáveis pela construção dessa complexa estrutura de leis interdependentes. Dos poucos matemáticos que se tornaram célebres, alguns trabalharam em conjunto com colegas, enquanto outros, sozinhos, ora devido à grande especificidade da área de estudo, ora devido ao puro egoísmo, à busca pela exclusividade na descoberta. Esse comportamento levou muitos matemáticos ao isolamento. Durante sua pesquisa, não raro, ocorria a obtenção de resultados parciais importantes. Entretanto, poupavam torná-los públicos, receosos de fornecer ferramentas a eventuais rivais atuantes na mesma linha de trabalho.

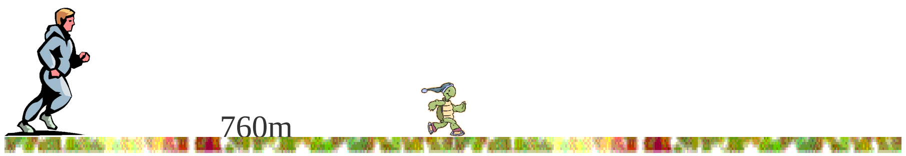
Uma história que retrata o ser matemático e suas angústias é contada no livro do escritor Apostolos Doxiadis: *Tio Petros e a Conjectura de Goldbach*. É um romance interessante em que um sobrinho narra a vida de seu tio, um matemático que dedicou grande parte de sua existência a resolver um problema extremamente difícil. Esse problema, até hoje não resolvido, embora de simples enunciado (*mostre que todo número inteiro par maior que 2 pode ser expresso como a soma de dois números primos*), apareceu numa correspondência entre Christian Goldbach e o famoso matemático suíço Leonhard Euler em 1742.

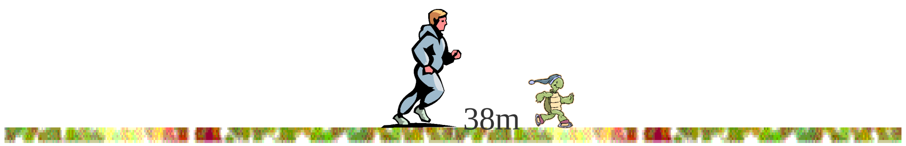
O paradoxo de Zenão

Há circunstâncias em que determinados conceitos, afirmações ou opiniões parecem fugir ao senso comum, parecem-nos à primeira vista contraditórios, não expressando uma verdade. Entretanto, se mostram possíveis, verdadeiros. Concepções que possuem essas características são denominadas *paradoxos*.

O filósofo grego Zenão, que viveu no século 5 a.C., propôs um paradoxo na intenção de demonstrar que o movimento dos corpos é fenômeno irreal, fruto da nossa imaginação. Considerado um dos mais famosos paradoxos da história da Filosofia, envolve uma corrida entre o herói grego Aquiles e uma tartaruga. Colocada em vantagem na largada, segundo Zenão, Aquiles nunca iria alcançá-la. O raciocínio de que se valeu era que, cada vez que Aquiles chegasse onde a tartaruga estivera, esta já estaria em uma posição mais adiante, assim se repetindo tal situação indefinidamente.

Vamos imaginar que a tartaruga esteja inicialmente 760m à frente de Aquiles e que este tenha uma velocidade 20 vezes maior que a dela. Isso significa que, após Aquiles percorrer a distância de 760m, colocando-se na posição que a tartaruga estivera, esta terá percorrido 38m. Quando Aquiles percorrer agora os 38m, a tartaruga estará 1,9m à sua frente. Enfim, toda vez que ele se colocar na posição que a tartaruga estivera anteriormente, ela terá percorrido uma distância 20 vezes menor, posicionada sempre à sua frente.





No exemplo dado, a sequência de distâncias que Aquiles percorre até o local em que a tartaruga estava no instante anterior, é: 760; 38; 1,9; …

Hoje sabemos tratar-se de uma Progressão Geométrica com soma finita. Mas a Matemática daquela época (até o século passado) tinha dificuldade em lidar com soma de infinitas parcelas. Os sábios encaravam as questões dessa natureza não somente como mais um problema matemático, como também uma questão filosófica.

O valor dessa soma é obtido da fórmula $S = \frac{a_1}{1-q}$, onde a_1 é a sua primeira parcela, isto é, 760, e $q = 1/20$ é a razão da P.G. associada a essa soma. Daí: $S = \frac{760}{1-0{,}05} = 800$. Isso implica dizer que, após percorrer uma distância de 800m, Aquiles alcançará a tartaruga.

À luz dessa interpretação matemática para o fenômeno que lança mão da noção do infinito, o paradoxo pôde ser entendido. A margem de discussão que ele proporciona reside justamente na natureza do infinito, não concebido no mundo físico.

No século passado um eminente matemático se dispôs a tratar dessa questão. David Hilbert (1862 – 1943) imaginou o infinito como uma idealização, fundamental ao desenvolvimento das teorias matemáticas. Muitas vezes essa noção se faz presente na criação de um modelo matemático para explicar um fenômeno físico.

Por fim, vamos calcular a distância que Aquiles percorre até o momento da ultrapassagem utilizando as equações horárias da Física. Sendo V a velocidade da tartaruga, S_A a posição de Aquiles e S_T a posição da tartaruga, ambas no instante t, ficamos com:

$$S_A = 20Vt \text{ e } S_T = 760 + Vt$$

No momento da ultrapassagem, $S_A = S_T$, de onde $Vt = 40$ e, assim sendo, $S_A = 20Vt = 20 \cdot 40 = 800$m.