Conteúdo

Ao Leitor 01

Cônicas: a elipse 01

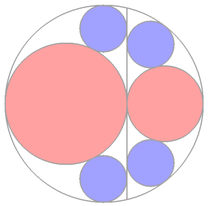
A matemática da dilatação do tempo 06
Rafael R. Sencio

A origem do termo "raiz quadrada" 08
Alexandre Foramiglio

Congruência modular 09
Cesar M. Tessarin

Construção Geométrica: raio de um arco 12

Problemas 13



Edição Especial

COLÉGIO absoluto ANGLO

Edição, ilustrações, seções e artigos não assinados: Calixto Garcia

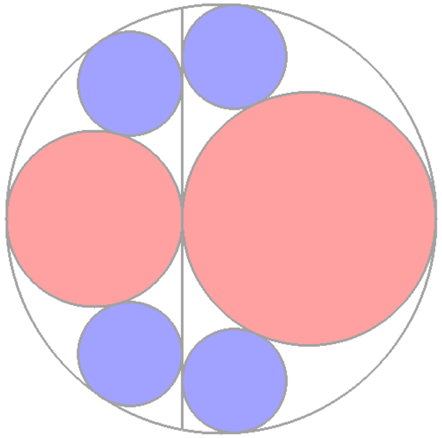
Esta edição está composta em *.doc*, fonte *Times New Roman*, corpo *12*

Contatos: – *Colégio Absoluto - Anglo:*
Rua Antonio Nery, 550, Tietê, SP; A/C Prof. Calixto Garcia

– *E-mail - Prof. Calixto Garcia:*
klixg@yahoo.com.br

RMCA

REVISTA DE MATEMÁTICA
DO COLÉGIO ABSOLUTO



10

Edição Especial

4º bimestre
2009

COLÉGIO absoluto ANGLO

Ao Leitor

Esta edição conta com a inauguração da seção *Construção Geométrica* e também com a contribuição de mais leitores. Essa iniciativa é importante para o desenvolvimento da capacidade de redação de textos de cunho científico, tão necessária em certos trabalhos escolares, sobretudo nos futuros cursos do nível superior. Acolhemos e prestamos orientação a todas com muita satisfação.

Boa leitura!

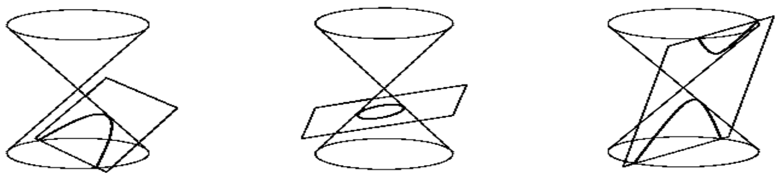
Calixto Garcia

Cônicas: a elipse

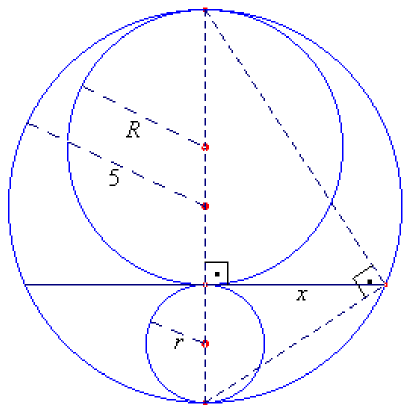
Desde os tempos antigos as formas geométricas fascinam a humanidade; umas pela beleza, outras pela funcionalidade. Arquitetos, artistas, matemáticos, entre outros, admiram-nas de maneira especial. Ao matemático interessa também a geometria envolvida e as equações que as determinam. Trata-se de conhecimentos fundamentais para a construção sistemática dessas formas.

A abordagem algébrica dada às figuras geométricas, em especial às curvas planas, foi desenvolvida no século XVII por Pierre Fermat e René Descartes.

Uma categoria interessante de curvas planas são as *cônicas*. Essas linhas resultam de adequadas intersecções entre um plano e um par de cones. As figuras a seguir ilustram essa motivação:



3 – A ilustração mostra um corte da figura de modo a determinar três circunferências de maior raio. Da relação métrica em triângulo retângulo pode-se concluir que $x^2 = 2R \cdot 2r = 4Rr$. Do enunciado, sabendo que o volume de uma esfera de raio a vale $4\pi a^3/3$, temos que:



$$20\pi = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot 5^3 - \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot R^3 - \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3,$$

que equivale a $R^3 + r^3 = 110$, ou a $(R + r)(R^2 - Rr + r^2) = 110$. Como $2R + 2r = 10$, ou $R + r = 5$, então $R^2 - Rr + r^2 = 22$ (*) e mais: $(R + r)^2 = R^2 + 2Rr + r^2 = 25$ (**). Efetuando (**) – (*), ficamos com $Rr = 1$. Daí, $x^2 = 4Rr = 4$, isto é, $x = 2$cm.

Problemas propostos

1 – Na página 12, a construção do segmento com a medida do raio de um arco dado, nas condições ali impostas, exigiu que esse arco tivesse um comprimento acima de um mínimo. Como proceder à construção se tal arco tivesse comprimento menor que esse mínimo?

2 – Mostre, utilizando-se da congruência modular, que a soma dos quadrados de dois números ímpares nunca resulta em um quadrado perfeito.

3 – De acordo com a Teoria da Relatividade Restrita de Einstein, segundo um referencial, a massa m de um corpo cresce com a sua velocidade V de acordo com a expressão $m = \gamma \cdot m_o$ onde m_o é a massa do corpo em repouso e γ é o fator de Lorentz, que se encontra na página 7. Calcule o percentual da velocidade da luz que deve ter um corpo para sua massa aumentar em 25% em relação à sua massa em repouso.

Problemas

Resolução dos problemas propostos no número anterior

1 – O montante acumulado por João nos 12 meses é assim calculado: $M = 300\cdot(1{,}008 + 1{,}008^2 + 1{,}008^3 + \ldots + 1{,}008^{12}) =$ $= 300\cdot 1{,}008\cdot\dfrac{1{,}008^{12}-1}{1{,}008-1} \cong 302{,}4\cdot\dfrac{0{,}10034}{0{,}008} \cong 3793$ reais. Este valor, dado como entrada, gera um saldo devedor de 5000 – 3793 = 1207 reais que, por sua vez, transforma-se em $1207\cdot 1{,}03^6 \cong 1441$ reais ao final de 6 meses. O valor de cada parcela do financiamento desse saldo devedor é dado por: $1441 = P\cdot(1{,}03 + 1{,}03^2 + \ldots + 1{,}03^6)$.

Daí: $1441 = P\cdot\dfrac{1{,}03^6-1}{1{,}03-1}$, ou $1441 \cong P\cdot\dfrac{0{,}194}{0{,}03}$. Então $P \cong 223$ reais.

2 – Uma vez que a velocidade relativa entre a mosca m e o mata-moscas M é de 2 + 0,5 = 2,5m/s, na 1ª ida m gasta 1/2,5 = 0,4s para chegar a M, percorrendo, assim, a distância de $2\cdot 0{,}4 = 0{,}8$m. Na volta, percorre mais 0,8m, durante a qual M caminha mais 0,2m, distando M, após isso, 0,6m da parede. Na 2ª ida m gasta 0,6/2,5 = = 0,24s para chegar a M, caminhando com isso $2\cdot 0{,}24 = 0{,}48$m. No 2º retorno, m percorre mais 0,48m, enquanto M se aproxima mais $0{,}5\cdot 0{,}24 = 0{,}12$m, ficando agora a 0,48 – 0,12 = 0,36m da parede. A 3ª ida de m a M demora 0,36/2,5 = 0,144s, cobrindo uma distância de $2\cdot 0{,}144 = 0{,}288$m, que é a mesma do 3º retorno à parede. Assim sendo, até então, m percorreu a distância de $2\cdot(0{,}8 + 0{,}48 + 0{,}288) =$ = 3,136m. Note que o segundo fator desse produto é a soma de uma P.G. de razão 0,6. A distância que m teoricamente percorrerá até ser esmagada por M pode ser calculada com o auxílio da fórmula da soma infinita dessa P.G. Seu valor é então de: $D = 2\cdot\dfrac{0{,}8}{1-0{,}6} = 4$m. Você é capaz de chegar a esse resultado sem se valer dessa soma?

Seu estudo teve origem no século IV a.C., acredita-se, com o matemático grego Menaecmus, na busca por curvas que, de alguma forma, auxiliassem no problema clássico da *duplicação do cubo* (obtenção do lado do cubo com o dobro do volume de um cubo dado).

Desde então, o estudo dessa família de curvas sempre recebeu a dedicação de matemáticos importantes, dentre os quais, Euclides, Apolônio de Perga e Newton.

Seu campo de aplicação é vasto. Aparecem, por exemplo, na trajetória de corpos celestes e no formato de espelhos e antenas.

Na figura anterior estão a *parábola*, a *elipse* e a *hipérbole*. Podemos dizer que a circunferência é um caso particular de *elipse* (situação em que o plano secante é paralelo às bases dos cones). Tais denominações são devidas a Apolônio, que, por sua vez, inspirou-se em nomenclaturas provavelmente pitagóricas que apareceram na resolução geométrica de equações quadráticas. Seus significados são, respectivamente: equiparação, falta e excesso.

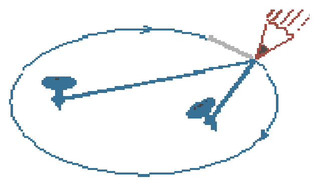
Pode-se mostrar que as cônicas são constituídas de pontos do plano cuja razão entre a distância a um ponto fixo e a distância a uma reta dada é igual a uma constante não negativa. O ponto, a reta e a tal constante são denominados, nessa ordem, foco, diretriz e excentricidade da cônica. Esta última indica seu nível de achatamento.

Nesta e nas próximas edições da **RMCA** abordaremos cada uma das cônicas estudando caracterizações, equações, construção por mecanismos, propriedades e aplicações.

A elipse

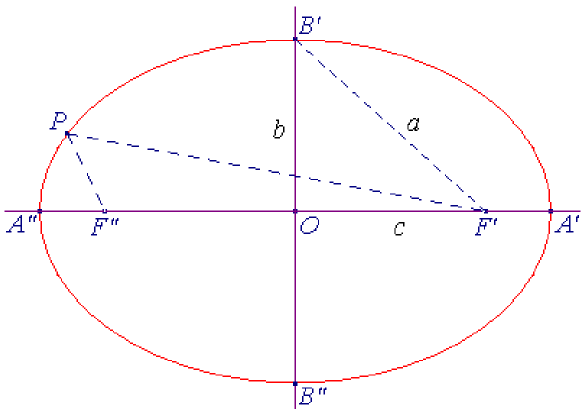
Uma caracterização de elipse muito empregada é a dada pela definição: o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos deste plano é constante. Os pontos fixos são chamados focos da elipse. O quociente da distância entre os focos pelo valor dessa constante é a sua excentricidade, que é menor que 1, como constataremos ao realizar seu estudo analítico.

Entre muitos aparatos, existe um mecanismo consagrado para desenhá-la valendo-se diretamente dessa caracterização. É composto de dois pontos fixos num plano em cada qual são presas as extremidades de um fio com medida maior que a distância entre esses dois pontos. Mantendo-se o fio esticado, desenha-se a elipse nesse plano.



A fim de obtermos a equação cartesiana reduzida de uma elipse, necessitamos considerar seus dois focos e uma medida maior que a distância entre eles. Para tanto, sejam $F' = (c, 0)$ e $F'' = (-c, 0)$ seus focos e $2a > F'F''$ a tal medida. Assim sendo, se $P = (x, y)$ é um ponto desta elipse, então devemos ter: $PF' + PF'' = 2a$, isto é:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a\,.$$



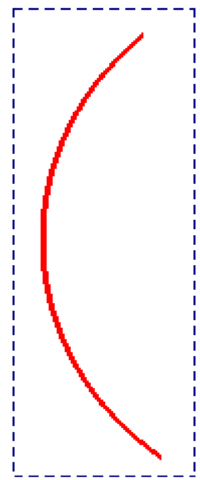
O leitor está convidado a transformá-la em $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, com $b^2 = a^2 - c^2$. A elipse em questão corta o eixo x em $A' = (a, 0)$ e em $A'' = (-a, 0)$ e o eixo y nos pontos $B' =$ $= (b, 0)$ e $B'' = (-b, 0)$.

A distância focal da elipse é $F'F'' = 2c$; $A'A'' = 2a$ é o seu eixo maior; $B'B'' = 2b$, o eixo menor; O seu centro e $e = c/a$ a excentricidade. Verifique geometricamente que $OA' = a = B'F'$.

Observações e exemplo: **1)** A elipse dada por $\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$ tem seus eixos de simetria $A'A''$ e $B'B''$ invertidos, isto é, contidos nos eixos y e x, respectivamente.

Construção Geométrica: raio de um arco

Um arco de circunferência está delimitado por uma linha tracejada, como ilustrado a seguir. Restrito a essa região, como construir geometricamente um segmento com medida igual ao seu raio?

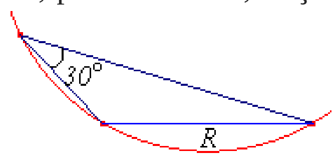


Eis uma situação que pode naturalmente surgir na prática: a procura do raio de curvatura de um arco, limitado a um espaço disponível insuficiente para encontrá-lo por vias usuais, ou seja, pela obtenção do segmento com extremos em um ponto do arco e no encontro de mediatrizes de duas de suas cordas, tomadas arbitrariamente.

Um fato importante a se considerar para atacar esse problema é a propriedade que possui um ângulo com vértice em uma circunferência, dito inscrito, cujos lados nela determinam um arco: a medida desse ângulo é a metade da medida do ângulo central que determina esse mesmo arco.

Se um ângulo inscrito mede 30°, o ângulo central a ele correspondente mede 60°. Os lados desse ângulo central juntamente com a corda que ele determina, formam um triângulo equilátero. Com isso, essa corda tem a mesma medida do raio da circunferência (ou de porção dela) em que foram tomados esses ângulos.

Assim sendo, dado um arco, para a construção do segmento que tem como medida o raio de sua curvatura, primeiramente, traçamos um ângulo, nele inscrito, de 30°, cuidando para que o arco associado a ele esteja contido no arco dado. A corda desse arco assim determinado mede o raio.



Note que essa construção requer que o arco dado corresponda a um ângulo central maior que 60°.

2 – Sistemas de identificação

Se aqui acima estivesse escrito ‘identificaçoã’, sem demora o erro seria notado. Isso porque já estamos acostumados com a palavra, e não é, portanto, complicado perceber que as duas últimas letras foram trocadas de posição.

Já com números, isso não seria tarefa fácil. Por mais movimentado que fosse um supermercado, dificilmente seus operadores de caixa notariam erros na digitação dos códigos de barras de muitos produtos. Para isso, e também para evitar fraudes, foram criados os chamados *dígitos de verificação*, presentes em diversos documentos e códigos. Eles têm a finalidade de verificar se praticamente tudo que foi digitado está correto.

Voltando ao supermercado, vamos conhecer e analisar o código de barras padrão EAN-13, um dos mais usados no mundo. Já que é constituído de 13 dígitos, vamos chamá-los de a_1, a_2, a_3, …, a_{13}. Destes, a_{13} é o dígito de verificação.

Cada um dos 12 primeiros dígitos deve ser multiplicado, nessa ordem, pela base {1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3} e, após, somados. Vamos representar essa soma por S. O dígito a_{13} deve ser tal que, ao ser somado com S, deve gerar um múltiplo de 10, isto é: $S + a_{13} =_{10} 0$.

Como exemplo, consideremos o código de barras de uma embalagem de café: 7 891021 006897. Observe que $S = 7\times1 + 8\times3 + 9\times1 + 1\times3 + 0\times1 + 2\times3 + 1\times1 + 0\times3 + 0\times1 + 6\times3 + 8\times1 + 9\times3 = 103 =_{10} 3$ e que $a_{13} = 10 - 3 = 7$. Este é o dígito de verificação que praticamente comprova a validade do código.

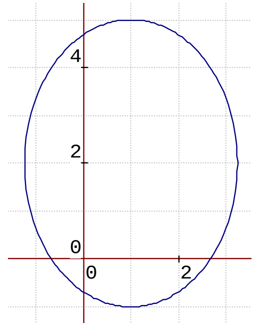
3 – Obtenção de resto de divisões

Qual é o resto da divisão de 13^{50} por 6? E por 7?

Veja que $13 =_6 1$. Daí, $13^{50} =_6 1^{50} = 1$. Então 1 é o resto da divisão de 13^{50} por 6. Agora, como $13 =_7 6$ e como $36 =_7 1$, segue que $13^{50} =_7 6^{50} = (6^2)^{25} = 36^{25} =_7 1^{25} = 1$, também resto da divisão de 13^{50} por 7.

2) A elipse com centro em (m, n) e eixos $A'A''$ e $B'B''$ paralelos aos coordenados, ou seja, oriunda de uma elipse centrada na origem, transladada horizontalmente de m e verticalmente de n, tem equação $\dfrac{(x-m)^2}{a^2}+\dfrac{(y-n)^2}{b^2}=1$, com eixo focal paralelo ao eixo x, $F' = (c + m, n)$ e $F'' = (-c + m, n)$. Invertendo-se seus denominadores, $F'F''$ fica paralelo ao eixo y, $F' = (m, c + n)$ e $F'' = (m, -c + n)$.

3) Seja a seguinte equação de uma curva do plano cartesiano: $9x^2 + 5y^2 - 18x - 20y - 16 = 0$. A soma das parcelas 9 e 20 em ambos os seus membros forma quadrados nos trinômios entre os parênteses: $(9x^2 - 18x + 9) + (5y^2 - 20y + 20) - 16 = 9 + 20$. A equação fica então assim: $9(x - 1)^2 + 5(y - 2)^2 = 45$, transformando-se em $\dfrac{(x-1)^2}{5}+\dfrac{(y-2)^2}{9}=1$ quando dividimos seus membros por 45. Ela representa uma elipse com centro em (1, 2), semi-eixo maior $a = \sqrt{9} = 3$, semi-eixo menor $b = \sqrt{5}$ e, como $c^2 = a^2 - b^2 = 4$, então $F' = (1, c + 2) = (1, 4)$ e $F'' = (1, -c + 2) = (1, 0)$ são seus focos.



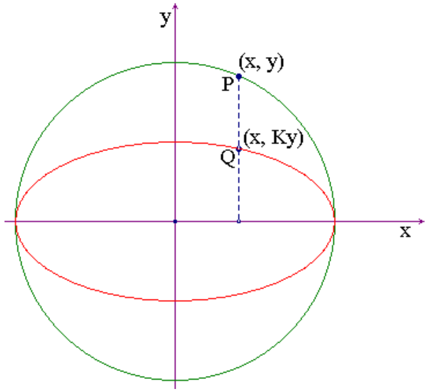
Podemos achatar, matematicamente falando, uma circunferência no sentido vertical (horizontal) bastando para isso multiplicar as ordenadas (abscissas) de cada um dos pontos que a compõe, por um fator constante K (0 < K < 1). A curva resultante dessa transformação de coordenadas é uma elipse. O fator de achatamento K, por assim dizer, está intimamente relacionado com sua excentricidade. Acompanhe a seguir os detalhes das provas dessas afirmações.

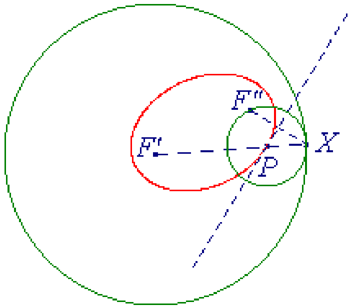
Sem perda de generalidade, consideremos uma circunferência centrada na origem e de raio unitário. Se P = (x, y) é ponto dessa circunferência, então, $x^2 + y^2 = 1$ ou $y = \pm\sqrt{1-x^2}$. Portanto, para a nova curva gerada, a cada valor de x, o atual correspondente y vale $\pm K\sqrt{1-x^2}$. Assim, $y^2 = K^2(1 - x^2)$, ou seja:

$\frac{x^2}{1^2}+\frac{y^2}{K^2}=1$, equação de uma elipse de semi-eixos $a = 1$ e $b = K$. Como $c^2 = 1 - K^2$ ou $c = \sqrt{1-K^2}$, a excentricidade da elipse é:

$$e = c/a = \sqrt{1-K^2}$$

Para K = 1, $e = 0$. Isso significa que a circunferência não sofre achatamento.





Consideremos agora uma circunferência λ de centro *F'* e um ponto *F"* na região delimitada por ela. O lugar geométrico dos centros *P* das circunferências tangentes a λ que passam pelo ponto *F"* considerado é uma elipse.

De fato: para cada *X* de λ, obtemos um ponto *P* como intersecção de *XF'* com a mediatriz de *XF"* e, fixado o raio *r* da circunferência maior, verificamos que *PF'* + *PF"* = *PF'* + + *PX* = *r*, o que caracteriza uma elipse de focos *F'* e *F"*.

Se uma mesa de bilhar tivesse o formato de uma elipse, uma bola que passasse por um de seus focos, após tocar a sua borda, tomaria a direção de outro foco. É precisamente esse o caminho descrito pela luz do conjunto ótico (lâmpada / espelho elíptico) no consultório odontológico: a lâmpada fica em um foco e, noutro, o dente a ser iluminado. Isso evita o desconforto do ofuscamento da visão do paciente. Os aparelhos de radioterapia valem-se também dessa propriedade, emitindo radiação com maior precisão sobre o tecido doente, poupando o sadio. Em salas com construção baseada em elipsóide, duas pessoas posicionadas nos seus focos, ainda que relativamente distantes, são capazes de conversar em tom baixo.

Assim como ocorre com a igualdade, esse operador também goza de propriedades. Antes de conhecê-las, observemos que, sendo $n =_m p$, temos como consequência que $n - p$ é múltiplo de m (ou que m divide $n - p$). Por exemplo, se $21 =_4 13$, então $21 = 4\times5 + 1$ (*) e $13 = 4\times3 + 1$ (**). De (*) – (**), segue que $21 - 13 = 4\times5 - 4\times3$ ou que $21 - 13 = 4\times(5 - 3)$. Com isso, temos 4 como divisor de 21 – 13.

Da generalização desse raciocínio demonstra-se que, $n =_m p$ se, e só se, m divide $n - p$, isto é, existe k inteiro com $n - p = k\cdot m$.

Sendo $n =_m p$ e $r =_m s$ e h inteiro positivo, são válidas as seguintes propriedades: **a)** $n + r =_m p + s$; **b)** $n \times r =_m p \times s$ e **c)** $n^h =_m p^h$.

Procure, leitor, comprová-las por meio de exemplos. Isso pode auxiliá-lo na demonstração formal das duas primeiras proprie-dades. Agora, fazendo $n = r$ e $p = s$ temos, de **b)**, que $n \times n =_m p \times p$, ou seja, que $n^2 =_m p^2$. Esta última, combinada a $n =_m p$, pela mesma propriedade, culmina em $n^3 =_m p^3$. Pelo princípio da indução finita (ver **RMCA 07**), sem grande dificuldade **c)** pode ser provada.

Seguem alguns exemplos de aplicações desse estudo:

1 – Critérios de divisibilidade

Sabemos que $10 =_3 1$. Então $10^n =_3 1^n = 1$, para n inteiro positivo. Por exemplo, o número 2317 pode ser escrito como $2\cdot 10^3 +$ $+ 3\cdot 10^2 + 1\cdot 10 + 7 =_3 2\cdot 1 + 3\cdot 1 + 1\cdot 1 + 7 = 2 + 3 + 1 + 7 = 13 =_3 1$. Portanto, 2317 não é divisível por 3 porque a soma de seus algarismos não resultou em um número divisível por 3 ($13 =_3 1 \neq 0$), e mais: o resto da divisão desse número por 3 é 1.

Sabemos que $10^3 =_8 2^3 = 8 =_8 0$ e que $10^n =_8 0$, para todo $n > 3$ (pois $10^n = 10^3\cdot 10^{n-3} =_8 0\cdot 10^{n-3} = 0$). Assim, por exemplo, 37136 pode ser assim escrito: $3\cdot 10^4 + 7\cdot 10^3 + 1\cdot 10^2 + 3\cdot 10 + 6 =_8 3\cdot 0 + \quad + 7\cdot 0 + 136 = 136 =_8 0$. Portanto, 37136 é divisível por 8 porque seus 3 últimos algarismos compõem um número divisível por 8.

De modo análogo pode-se descobrir os critérios de divisibilidade de outros números com o auxílio da congruência modular.

Congruência modular

Cesar M. Tessarin

O operador matemático *módulo* fornece o resto da divisão entre dois números inteiros. Ao escrever 17 (mod 5) = 2 significa dizer que a divisão de 17 por 5 gera resto 2. Da mesma forma, tem-se que 22 (mod 5) = 2. Temos aqui dois números que possuem a seguinte propriedade: divididos por 5, deixam restos iguais. Denominado *congruência modular*, Gauss introduziu notação específica nesse estudo. Escrevemos 17 ≡ 22 (mod 5) (lê-se: 17 é congruente a 22 módulo 5), ou $17 =_5 22$ para dizer que 17 e 22 são equivalentes módulo 5.

É fácil perceber que há uma infinidade de números que geram resto 2 quando divididos por 5, a saber, {…, – 3, 2, 7, 12, …} Trata-se de uma P.A. de razão 5 da forma $5k + 2$, com k inteiro. Seus elementos formam uma coleção chamada *classe de equivalência*. Note que existem 5 *classes de equivalência* módulo 5, constituindo-se de P.A's. disjuntas de razão 5: {…, 0, 5, 10, …}, {…, 1, 6, 11, …}, {…, 2, 7, 12, …}, {…, 3, 8, 13, …} e, por fim, {…, 4, 9, 14, …}.

A aritmética modular é uma importante ferramenta com diversas aplicações, desde simples até mais complexas. Como exemplos do cotidiano, aparece nas horas indicadas por um relógio e no nosso calendário. Observe que o ponteiro das horas apontando o nº 5 se refere a dois possíveis horários: 5h ou 17h. Veja que 5 ≡ 17 (mod 12). Já num calendário, há fileiras formadas por números, todos congruentes módulo 7. Assim sendo, se o dia 2 de certo mês cai em uma terça-feira, então o dia 31 desse mesmo mês cai na quarta-feira, pois o dia 30 é uma terça-feira, já que $2 =_7 30$.

Embora despercebida, a congruência modular está presente em códigos de barras, codificação de documentos, como o CPF, e também é largamente usada na criptografia. O operador módulo é aplicado de diversas formas importantes na informática, algo que pretendemos discutir em outra ocasião.

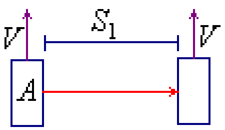
A matemática da dilatação do tempo

Rafael R. Sencio

No final do século XIX e início do século XX, experimentos mostravam que não era mais sustentável a ideia de tempo e espaço absolutos, como propora Isaac Newton. As equações do eletromagnetismo de Maxwell estariam erradas se Newton estivesse certo. Porém, em 1905, Albert Einstein mudou essa ideia publicando a Teoria da Relatividade Restrita, também chamada de Especial, contribuindo imensamente para a Física Moderna. Mais tarde, em 1916, ele publicaria a Teoria da Relatividade Geral. Essas teorias redimensionaram a Mecânica newtoniana.

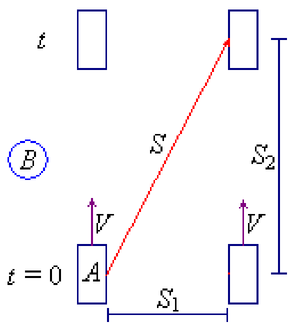
Em muitos escritos não-matemáticos sobre a Teoria da Relatividade Restrita há informações acerca do Paradoxo dos Gêmeos, no qual um gêmeo parte para uma longa viagem em uma nave espacial com a velocidade próxima à da luz e, quando volta, está mais novo que seu irmão que ficou na Terra. Isso se deve à dilatação (ou dilação) do tempo para o observador inercial que está aqui na Terra. Explicações não-matemáticas muitas vezes soam de modo estranho aos ouvidos dos céticos e essa foi uma das razões pelas quais escrevi este texto, cujo objetivo é mostrar, utilizando uma matemática simples, a dilatação do tempo (e, como consequência, a contração do espaço). Para tanto, acompanhe o raciocínio exposto a seguir.

Imaginemos duas naves espaciais viajando uma ao lado da outra com uma mesma velocidade V em relação a um observador B fora delas. Para um observador A dentro de uma das naves, a outra estará em repouso.



Se um feixe de luz é emitido da nave de A em direção à outra nave, este percorrerá a distância S_1 entre elas, atingindo-a após um tempo, que chamaremos t_o. Logo, $S_1 = c \cdot t_o$, onde c é a velocidade da luz no vácuo.

No entanto, para B, o feixe de luz está percorrendo um espaço S durante um intervalo de tempo t, como se pode observar na ilustração abaixo. Seguindo um postulado da Teoria da Relatividade que afirma que a velocidade da luz c é constante para todo observador, em qualquer referencial inercial, a velocidade V da nave em que está A (ou a velocidade da fonte de luz) não influirá na velocidade do feixe de luz que atingirá a outra nave. Note, da ilustração, que $S_2 = V{\cdot}t$ e que $S = c{\cdot}t$. Como, do teorema de Pitágoras, $S^2 = S_1^2 + S_2^2$, segue que: $(c{\cdot}t)^2 = (c{\cdot}t_o)^2 + (V{\cdot}t)^2$.



Daí: $c^2t^2 - V^2t^2 = c^2t_0^2 \quad \rightarrow \quad t^2(c^2 - V^2) = c^2t_0^2 \quad \rightarrow$

$$\rightarrow \quad t^2 = \frac{c^2t_0^2}{c^2 - V^2} \underset{\div c^2}{\overset{\div c^2}{=}} \frac{t_0^2}{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2} \quad \rightarrow \quad t = t_o \cdot \sqrt{\frac{1}{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}.$$

Chamamos o termo expresso pelo radical de fator de Lorentz ou fator de correção relativística, simbolizado por γ. Com isso, ficamos com $t = \gamma{\cdot}t_o$. Como $V < c$, então teremos sempre $V/c < 1$, $\gamma > 1$ e, consequentemente, $t > t_o$, confirmando, portanto, a dilação do tempo.

O fator de Lorentz está igualmente presente na relação entre a massa m_o de um corpo em repouso e sua massa m, quando em movimento, segundo um referencial: $m = \gamma{\cdot}m_o$. Em nosso cotidiano γ vale praticamente 1, pois $V << c$, ou seja, o tempo e a massa não sofrem alterações perceptíveis. Porém, por exemplo, nos aceleradores de partículas (equipamentos que fornecem energia a partículas eletricamente carregadas), constata-se ganho de massa da matéria acelerada, quando alcança grande velocidade. Não há, então, como aumentar indefinidamente a velocidade de tais partículas pois, teoricamente, adquiririam massa infinita quando alcançassem a velocidade da luz.

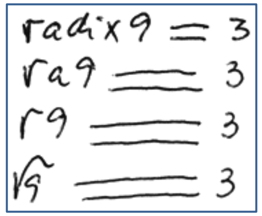
A origem do termo “raiz quadrada”

Alexandre Foramiglio

Um termo muito usado na Matemática é “raiz quadrada”. Esse termo, porém, é simplesmente aceito pelos estudantes, sem saber de onde veio o símbolo $\sqrt{\ }$ que o representa e o porquê desse nome. Se levarmos ao pé da letra, “raiz quadrada” refere-se a uma parte das plantas com forma quadrada. Pensando assim, não há sentido para tal nome, nem para a função que ele exerce. E não há sentido mesmo, pois verificando a história da Matemática, entende-se a origem e o significado verdadeiro dessa expressão tão usada nas escolas.

Em latim, escreve-se *radix quadratum 9 aequalis 3*. Traduzindo cada palavra, tem-se: *radix* = lado, *quadratum* = quadrado, *aequalis* = igual. Portanto, literalmente: “lado do quadrado 9 igual a 3”, que quer dizer que a medida do lado de um quadrado de área 9 é igual a 3. O que ocorreu foi que traduziu-se (de modo errado) a palavra *radix* para “raiz”, daí a expressão “raiz quadrada de 9 é 3”.

Já a origem do símbolo $\sqrt{\ }$ é mais curiosa. Para diminuir o tamanho da expressão, escrevia-se *radix*9 = 3. Com o passar do tempo, foi-se encurtando a palavra *radix*, variando a forma de se escrever o mesmo termo. Primeiro, foi de *radix*9 para *rad*9, depois para *ra*9, depois apenas *r*9 e finalmente usou-se $\sqrt{9}$, como se o r abraçasse o 9. Assim sendo, o símbolo $\sqrt{\ }$ provém da letra r, do latim *radix*, que significa “lado”.



Conhecemos agora a origem do termo “raiz quadrada” e podemos entender seu verdadeiro significado na Matemática.

Referência Bibliográfica

- http://www.prandiano.com.br/html/fr_aula.htm