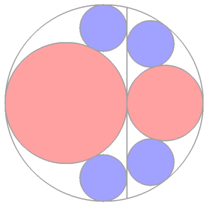
Conteúdo



Edição, ilustrações, seções e artigos não assinados: Calixto Garcia

Esta edição está composta em *.doc*, fonte *Times New Roman*, corpo *12*

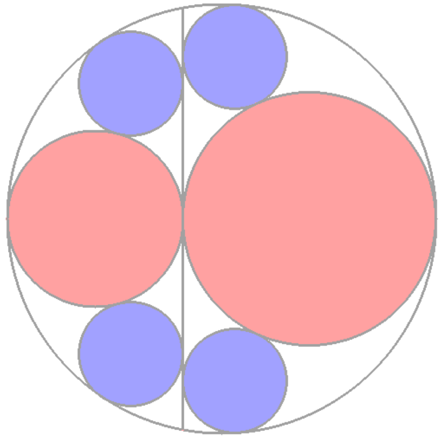
Os artigos publicados são de responsabilidade dos autores. Solicitamos que a reprodução de artigos desta obra tenha a indicação de fonte.

Contatos: – *Colégio Absoluto - Anglo:*
Rua Antonio Nery, 550, Tietê, SP; A/C Prof. Calixto Garcia

– *E-mail - Prof. Calixto Garcia:*
klixg@yahoo.com.br

RMCA

REVISTA DE MATEMÁTICA
DO COLÉGIO ABSOLUTO



11

1º bimestre

2010

Ao Leitor

Ótimo 2010 a todos!

Ao longo desses dois anos de nossa revista, desfrutamos de muitos prazeres, entre os quais, a colaboração de leitores com artigos e o estudo de situações ou problemas que foram posteriormente abordados em vestibulares. Procedemos a ajustes e até correções em alguns textos. As atualizações decorrentes disso já foram efetuadas, sendo a mais significativa no artigo "*O número áureo*" da revista 04.

Motivados pela curiosidade despertada pelo texto *"A origem do termo 'raiz quadrada'"*, da revista anterior, vários leitores sugeriram a introdução de uma seção que tivesse essa característica. A partir desta edição, estaremos atendendo a esse interessante pedido.

Boa leitura!

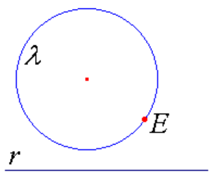
Calixto Garcia

CG: circunferências tangentes

Apresentamos aqui duas situações que envolvem a construção geométrica (acima abreviada CG) de circunferências tangentes simultaneamente a uma reta e uma circunferência dadas, passando por um ponto também dado. Trata-se de problemas menos complexos que o proposto na revista de número 7 (com resolução na 8), porém não menos interessante, especialmente no que tange ao estudo do número de soluções que eles apresentam.

Construção 1

Dada uma reta r, uma circunferência λ e um ponto E desta, construir uma circunferência tangente a r e a λ no ponto E.



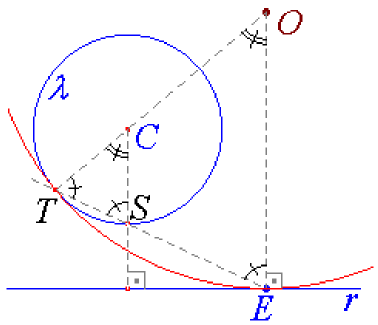
2 – Um triângulo tem lados com medidas 6cm, 15cm e 18cm. Qual é a distância do vértice do maior ângulo ao baricentro desse triângulo?

3 – (*ITA 03*) Considere a família de circunferências com centros no segundo quadrante de um sistema cartesiano, tangentes ao eixo y. Cada uma destas circunferências corta o eixo x em dois pontos, distantes entre si 4 cm. Então, o lugar geométrico dos centros destas circunferências é parte:

a) de uma elipse b) de uma parábola c) de uma hipérbole
d) de duas retas concorrentes e) da reta $y = -x$

Solução do problema apresentado na página 4

Vamos supor o problema resolvido analisando a ilustração ao lado. Sabemos que o ponto de tangência T está alinhado com os pontos O e C. Também sabemos que OE é perpendicular a r. Ao traçar uma perpendicular a r, por C, determinamos em λ o ponto S. Os segmentos ES e ET têm mesma inclinação em relação a r, já que os ângulos de vértice S e E indicados na figura têm medidas iguais, pois os triângulos OTE e CTS são isósceles e semelhantes. Portanto, E, S e T estão alinhados.



A construção inicia-se com o traçado das referidas perpendiculares. Uma vez obtido o ponto S, traça-se a reta ES. Esta intersecta λ em T. O ponto O procurado é comum entre a perpendicular a r, por E, e a reta TC a ser traçada. O raio da circunferência-solução é OE.

O leitor pode realizar essa construção para o caso da reta r interceptar a circunferência λ. Os procedimentos são semelhantes.

2 – Sabemos que um número ímpar pode ser expresso por $2k+1$, com k inteiro. Então, seu quadrado é $(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$, que pode ser reescrito assim: $4(k^2 + k) + 1$. Isso significa que esse número deixa resto 1 quando dividido por 4. Sejam m e n dois ímpares. Então, $m^2 =_4 1$ e $n^2 =_4 1$. De propriedade da congruência modular, temos que $m^2 + n^2 =_4 2$, ou seja, que $m^2 + n^2$ é múltiplo de 2, mas não de 4. E isso quer dizer que, quando decomposta em fatores, essa soma apresenta um, e só um, fator 2. Com isso, não pode representar um quadrado.

Como consequência desse fato, podemos concluir que não existe triângulo retângulo de lados com medidas inteiras que possua catetos com medidas sendo ambas ímpares. Logo, uma terna pitagórica primitiva tem sempre como maior elemento um número ímpar.

3 – A massa m_o, após um aumento de 25%, transforma-se em $m = 1{,}25m_o$. Como $m = \gamma \cdot m_o$, devemos ter $\gamma = 1{,}25 = 5/4$, isto é:

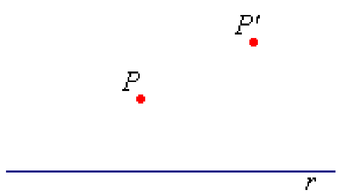
$$\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}} = \frac{5}{4} \rightarrow \frac{1}{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2} = \frac{25}{16} \rightarrow 1-\left(\frac{V}{c}\right)^2 = \frac{16}{25} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\frac{V}{c}\right)^2 = 1 - \frac{16}{25} \rightarrow \left(\frac{V}{c}\right)^2 = \frac{9}{25} \rightarrow \frac{V}{c} = \frac{3}{5} \rightarrow \frac{V}{c} = 0{,}6.$$

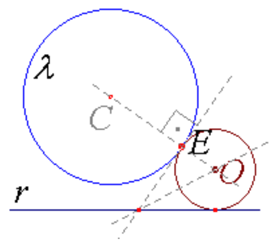
Portanto, para sua massa aumentar em 25% em relação à sua massa em repouso, um corpo deve ter 60% da velocidade da luz.

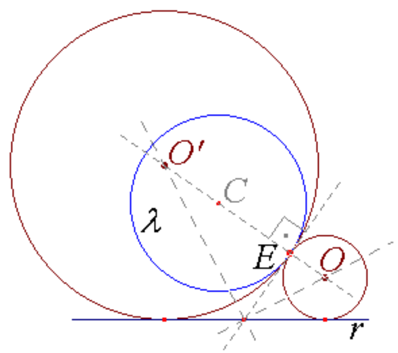
Problemas propostos

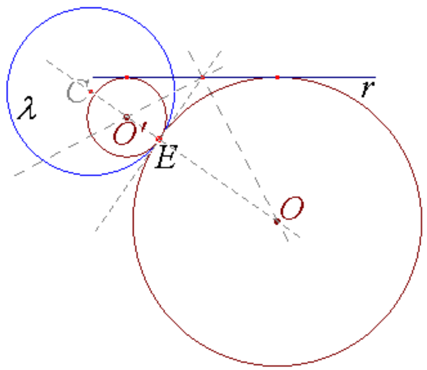
1 – Observe a figura ao lado. Construir uma circunferência que passe por P e P' e seja tangente à reta r.



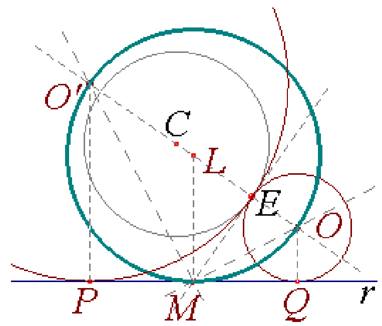
A circunferência a se construir fica definida conhecendo-se o seu centro e o seu raio. Analisando um esboço da construção ao lado, percebemos que o centro O que se procura está alinhado com o centro C da circunferência dada e o ponto E. Por outro lado, tal centro deve ser equidistante da reta r e do ponto E ou da única reta que é tangente à λ em E. Isso equivale a dizer que O deve estar na bissetriz entre a reta r e essa reta tangente. O raio da circunferência procurada é OE. Como há duas bissetrizes quando se considera duas retas concorrentes, então esse problema tem duas soluções, que são apresentadas a seguir, em duas situações: com a reta r interceptando ou não λ, sem, entretanto, conter E.







Observe que as bissetrizes em questão são perpendiculares pois são oriundas de ângulos suplementares adjacentes. Em virtude disso, a circunferência de centro L e diâmetro OO' contém M, e mais: tangencia r nele. De fato, M é ponto médio dos pontos de tangência P e Q, já que $PM = ME = MQ$. Daí, LM é base média do trapézio retângulo $PQOO'$. Logo, $LM \perp r$.

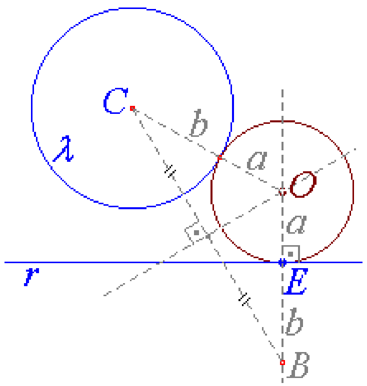


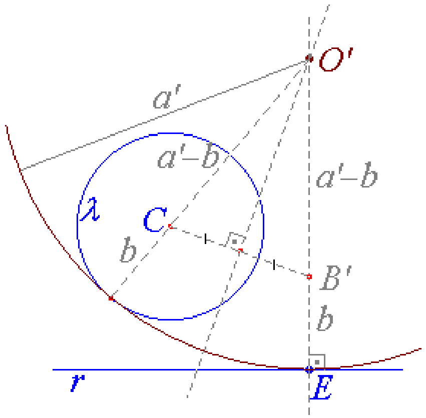
Construção 2

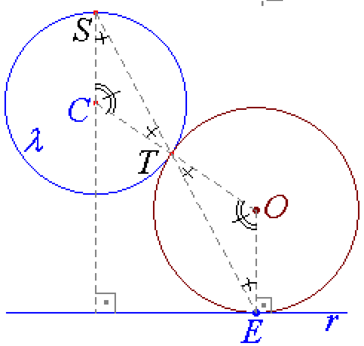
Dada uma circunferência λ, uma reta r e um ponto E desta, construir uma circunferência tangente a λ e a r no ponto E.

A exemplo do que fizemos com o problema anterior, vamos buscar, num esboço dessa construção, propriedades que possam sugerir um roteiro, investigando também o número de soluções.

No esboço da esquerda, percebemos que o centro O da circunferência procurada está na perpendicular a r pelo ponto dado E, bem como na mediatriz de CB. Logo, está na intersecção dessas retas. O raio da circunferência procurada é OE. Veja que o segmento de medida b, na tal perpendicular, poderia ter sido posicionado, a partir de E, no outro lado em relação à r. Deste modo, conseguimos outra solução, como podemos constatar no esboço à direita.





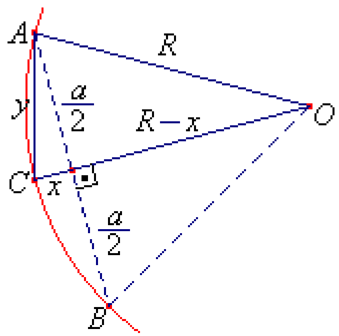


Agora, repare bem nesse esboço da esquerda. Ele exibe outra maneira de encaminhar a construção da circunferência que tangencia λ externamente. Para nos assegurarmos que a construção é matematicamente consistente, devemos observar que: o ponto de tan-

Problemas

Resolução dos problemas propostos no número anterior

1 – Na revista anterior, o arco dado serviu de apoio para a obtenção de seu raio, construído, aliás, na mesma região disponibilizada pela figura no enunciado do problema. Aqui, a intenção não é construí-lo nessa região, até porque o tamanho dela pode não ser suficiente para contê-lo. O intuito é, restrito àquela região, buscar informações para que seja possível a construção do raio desse arco, podendo, então, ser realizada em local à parte.



Vamos obter uma expressão algébrica para o raio do arco dado.

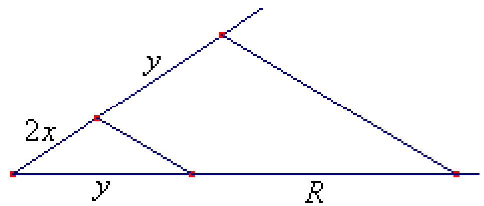
Da figura ao lado, seja AB uma corda qualquer desse arco. Tracemos a mediatriz dela. De um dos triângulos retângulos que ali aparece, temos que:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + (R-x)^2 = R^2 .$$

Com isso: $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + R^2 - 2Rx + x^2 = R^2$. Daí: $R = \dfrac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + x^2}{2x}$.

Note que o numerador dessa expressão resulta no quadrado da hipotenusa de um triângulo com catetos de medidas $a/2$ e x. Na figura acima, essa hipotenusa está representada por AC, de medida y.

A partir dessa expressão é possível construir R valendo-se do teorema de Tales, como sugere a ilustração ao lado em que os 2 segmentos sem rótulos são paralelos.



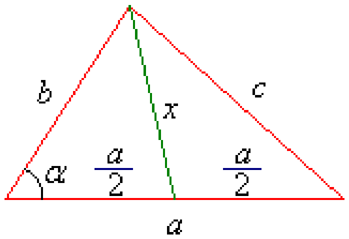
Uma fórmula para a mediana de um triângulo

Num triângulo, a mediana é um segmento que tem uma extremidade em um de seus vértices e a outra no ponto médio do lado oposto a esse vértice.

Um triângulo tem lados com medidas 5cm, 6cm e 7cm. Quanto mede a mediana relativa ao lado com medida 6cm?

Antes de resolver essa questão, propomos construir uma fórmula que ofereça o valor dessa mediana em função de seus lados.

Aplicando-se a lei dos co-senos no maior triângulo e também na sua metade esquerda, criamos o sistema:



$$\begin{cases} c^2 = a^2 + b^2 - 2\cdot a\cdot b\cdot \cos\alpha \\ x^2 = \dfrac{a^2}{4} + b^2 - 2\cdot \dfrac{a}{2}\cdot b\cdot \cos\alpha \end{cases}$$

Ao dividirmos por 2 a 1ª equação, ficamos com:

$$\begin{cases} \dfrac{c^2}{2} = \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{b^2}{2} - 2\cdot \dfrac{a}{2}\cdot b\cdot \cos\alpha \\ x^2 = \dfrac{a^2}{4} + b^2 - 2\cdot \dfrac{a}{2}\cdot b\cdot \cos\alpha \end{cases}$$

Subtraindo da 2ª, a 1ª equação, obtemos:

$x^2 - \dfrac{c^2}{2} = \dfrac{a^2}{4} - \dfrac{a^2}{2} + b^2 - \dfrac{b^2}{2}$, ou $x^2 = -\dfrac{a^2}{4} + \dfrac{b^2}{2} + \dfrac{c^2}{2} =$ $= \dfrac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$. Por fim, temos que $x = \dfrac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2}$.

Segundo a questão acima, $a = 6$, $b = 5$ e $c = 7$. Verifique, leitor, que, com esses dados, obtemos para a mediana $x = 2\sqrt{7}$ cm.

gência T está contido em CO; as perpendiculares a r por C e por E determinam os ângulos indicados com vértices em C e em O de medidas iguais; os triângulos isósceles com vértices nesses pontos são então semelhantes e, portanto, os ângulos STC e ETO têm medidas iguais. Logo, S, T e E são colineares.

Com essas considerações, o ponto de tangência T obtém-se da intersecção entre λ e o segmento SE. A reta CT intersecta a perpendicular a r, por E, em O, centro da circunferência procurada.

Procure você, leitor, por meio dessa última concepção, obter a outra solução para esse problema. [*construção na página 10*]

Curiosidade: diferenças entre quadrados

Você certamente conhece a expressão que resulta da diferença entre quadrados de dois números reais: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$. Assim: $(m + n)^2 - (m - n)^2 = (m + n + m - n)(m + n - (m - n)) = 4mn$.

Na expressão acima, quando m é do tipo $25\cdot 10^k$, escrevemos: $(m + n)^2 - (m - n)^2 = 4mn = 100\cdot 10^k = n\cdot 10^{k+2}$.

Por exemplo, se $k = 0$, $m = 25$ e $(25 + n)^2 - (25 - n)^2 = 100n$.

para $n = 1$: $(25 + 1)^2 - (25 - 1)^2 = 26^2 - 24^2 = 100\cdot 1 = 100$
para $n = 2$: $(25 + 2)^2 - (25 - 2)^2 = 27^2 - 23^2 = 100\cdot 2 = 200$
para $n = 3$: $(25 + 3)^2 - (25 - 3)^2 = 28^2 - 22^2 = 100\cdot 3 = 300$ …

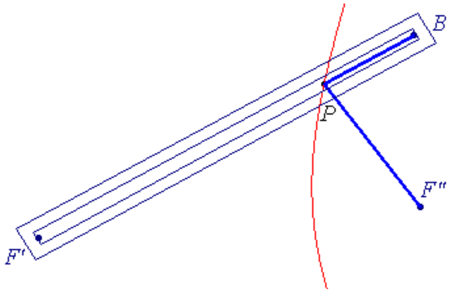
Na tabela abaixo destacamos pares de quadrados envolvidos. Fabrique outras coleções com o termo central do tipo $25\cdot 10^k$.

20^2	21^2	22^2	23^2	24^4	25^2	26^2	27^2	28^2	29^2	30^2
400	441	484	529	576	625	676	729	784	841	900

A hipérbole

É o lugar geométrico dos pontos de um plano cujo módulo da diferença entre as distâncias a dois pontos fixos desse plano é constante. Os pontos fixos são os focos da hipérbole. O quociente da distância entre os focos pelo valor desta constante é a sua excentricidade, que, contrariamente ao da elipse, é maior que 1.

O aparato descrito a seguir esboça um trecho de hipérbole. Ele tem por base uma régua (*BF'*) com uma fenda longitudinal, fixada em uma extremidade (*F'*), podendo girar em torno dela sobre um plano. Em outro ponto fixo (*F"*) desse plano é preso um fio. Sua outra ponta é presa na extremidade livre da régua (*B*). Mantendo um lápis na fenda (em *P*), com o fio de comprimento *c* esticado, desenha-se uma parte de um ramo de hipérbole, dada por |*PF' – PF"*| = *BF' – c*, que é constante.



Para que esse aparato trace a hipérbole, devemos obedecer à seguinte condição: *BF' – F'F"* < *c* < *BF'*.

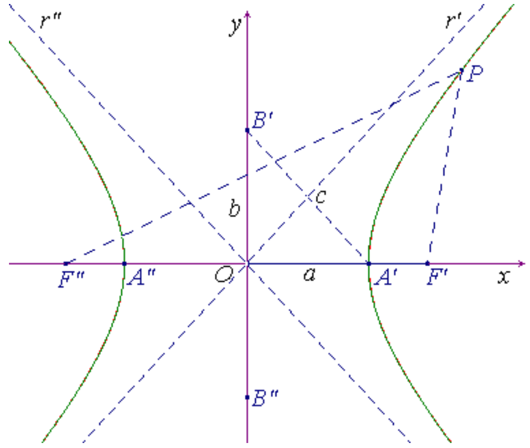
Para obtermos a equação cartesiana reduzida de uma hipérbole, necessitamos considerar seus dois focos e uma medida menor que a distância entre eles. Sejam então *F'* = (*c*, 0) e *F"* = (– *c*, 0) seus focos e 2*a* < *F'F"* a tal medida. Assim sendo, se *P* = (*x*, *y*) é um ponto dessa hipérbole, devemos ter: |*PF' – PF"*| = 2*a*, isto é:

$$\left|\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right| = 2a\,.$$

Com um pouco de persistência, o leitor pode transformá-la em $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$, com $b^2 = c^2 - a^2$.

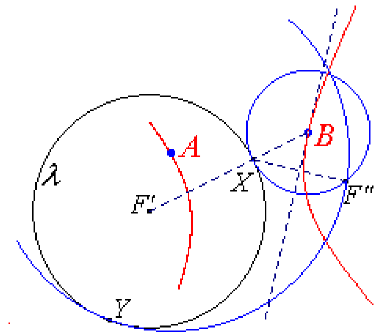
A hipérbole em questão corta o eixo *x* em *A'* = (*a*, 0) e em *A"* = (– *a*, 0). Intercepta o eixo *y* em *B'* = (*b*, 0) e em *B"* = (– *b*, 0), e possui assíntotas *r'* e *r"*.

A distância focal da hipérbole é *F'F"* = 2*c*; *A'A"* = 2*a* é o seu eixo transverso; *B'B"* = 2*b*, o eixo não transverso; *O*, seu centro e *e* = *c*/*a*, a excentricidade. As equações das assíntotas *r'* e *r"* são $y = \pm(b/a)x$. Se *a* = *b* a hipérbole é dita *eqüilátera*. Verifique geometricamente que *OF'* = *A'B'* = *c*.



A translação dessa hipérbole no plano gera equações análogas às que foram apresentadas para a elipse na revista anterior.

Consideremos agora um ponto fora da região delimitada por uma circunferência λ. O lugar geométrico dos centros das circunferências tangentes a λ que passam pelo ponto considerado é uma hipérbole. De fato, para cada *X* em λ, obtemos um ponto como intersecção de *XF'* com a mediatriz de *XF"* e, sendo *r* o raio de λ, verificamos na figura que *BF' – BF"* = *BF' – BX* = *r*, constante, caracterizando uma hipérbole. Note que, para *Y*, obtemos o outro ramo da hipérbole.



Por oferecer vantagens em construção e montagem, espelhos hiberbólicos estão presentes em telescópios, como o do famoso observatório de Monte Palomar, na Califórnia. A hipérbole aparece também em formas arquitetônicas e na órbita de corpos celestes.