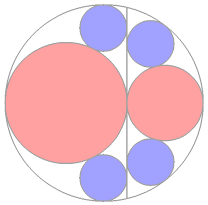
Conteúdo



Edição, ilustrações, seções e artigos não assinados: Calixto Garcia

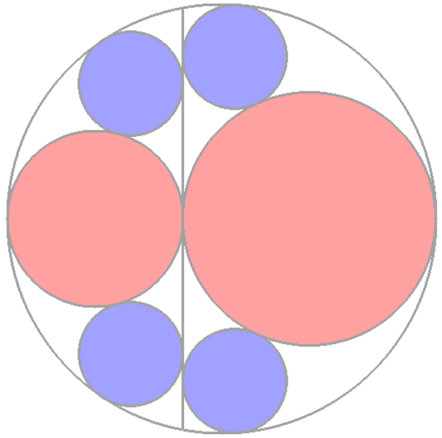
Esta edição está composta em *.doc*, fonte *Times New Roman*, corpo *12*

Contatos: – *Colégio Absoluto - Anglo:*
Rua Antonio Nery, 550, Tietê, SP; A/C Prof. Calixto Garcia

– *E-mail - Prof. Calixto Garcia:*
klixg@yahoo.com.br

RMCA

REVISTA DE MATEMÁTICA DO COLÉGIO ABSOLUTO



12

2º bimestre

2010

Ao Leitor

Estamos vivendo um momento particularmente importante da Matemática. Noticiou-se que um dos sete problemas matemáticos escolhidos como desafios propostos para este século, *a conjectura de Poincaré*, foi resolvido por um matemático russo chamado *Grigori Perelman*. Entre várias áreas da Matemática, Poincaré (1854 – 1912) trabalhou com *Topologia* (um tipo de Geometria desenvolvida num espaço deformável), na qual surgiu o referido enigma. Poincaré conjecturou que um resultado sabidamente verdadeiro para o espaço bidimensional poderia ser válido para espaços de dimensões maiores.

A 2ª edição da OMCA, a Olimpíada de Matemática de nossa escola, está chegando ao fim. Os treinamentos este ano foram divididos, em cada uma das duas fases, por assuntos.

Boa leitura!

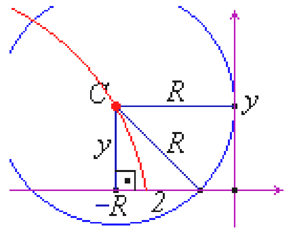
Calixto Garcia

A parábola

A parábola é o lugar geométrico dos pontos do plano que são equidistantes de uma reta dada e de um ponto fixo a ela não pertencente. O ponto fixo é o foco da parábola e a reta dada é a sua diretriz. A excentricidade dessa cônica é 1, pois é o quociente entre as distâncias de cada ponto que a constitui à diretriz e ao foco.

Consideremos, num sistema cartesiano, a diretriz d com equação $x = -c$, sendo c um parâmetro positivo, e o foco F com coordenadas $(c, 0)$. Da figura a seguir, se $P = (x, y)$ é ponto dessa parábola, então devemos ter $PF = PP'$, isto é: $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{(x+c)^2}$.

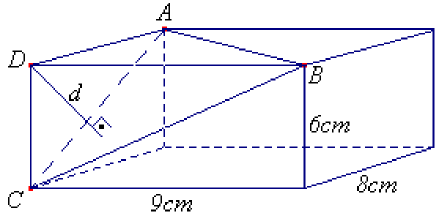
O leitor pode manipular essa equação e chegar com facilidade à sua forma equivalente $y^2 = 4cx$, cujo gráfico apresentamos a seguir:



Do triângulo retângulo: $R^2 = y^2 + 4$. Como $x = -R$, então $x^2 = R^2$. Daí, a equação acima pode ser assim reescrita: $x^2 - y^2 = 4$, ou ainda, $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$, o que caracteriza uma hipérbole eqüilátera centrada na origem.

Problemas propostos

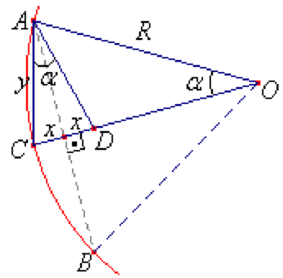
1 – Em um paralelepípedo reto-retângulo efetuou-se um corte, como se pode constatar na figura ao lado. Obter a distância d do vértice D ao plano que contém o triângulo ABC.



2 – O primeiro problema proposto na revista anterior, cuja resolução encontra-se nesta revista, pode também ser tratado sob o contexto de parábolas, assim como ocorreu na página 7. Efetue a referida construção de forma ilustrativa. Se possível, faça uso de um programa de Geometria Dinâmica.

3 – Sejam uma circunferência e uma reta r que não a intersecta. Que propriedade tem os pontos que equidistam dessa circunferência e da reta dada?

Observação sobre a construção do raio de um arco dado (RMCA 11, página 8)

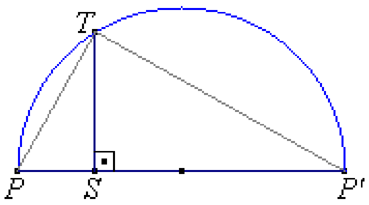


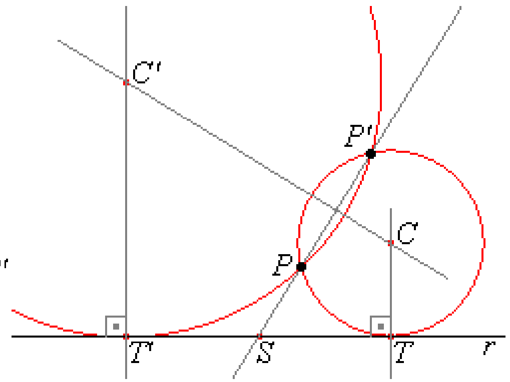
Pode-se verificar ao lado que os triângulos isósceles OAC e ACD são semelhantes. Daí, tem-se também que $\frac{R}{y} = \frac{y}{2x}$, ou $R = \frac{y^2}{2x}$.

Problemas

Resolução dos problemas propostos no número anterior

1 – Observe a figura-solução a seguir. A reta traçada por PP' intersecta r em S. Da potência do ponto S em relação às circunferências de centros C e C', temos que $SP \cdot SP' = ST^2 = ST'^2$. A construção dos segmentos ST ou ST' está efetuada ao lado e decorre de relação métrica em triângulo retângulo. Uma vez transportados em r, como indicado, as perpendiculares a essa reta, por T e por T', intersectam a mediatriz de PP' em C e C'.

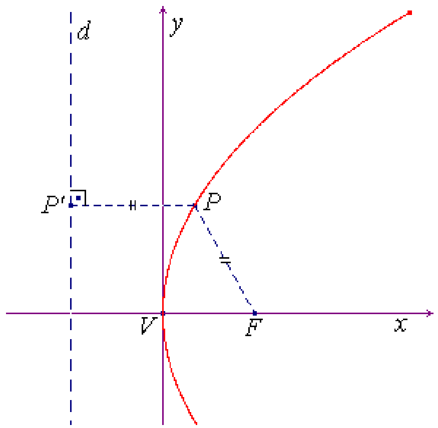




2 – Seja AM a mediana do triângulo ABC relativa ao seu maior lado e G o seu baricentro. Então $AG = ⅔\, AM$. A medida da mediana AM, por sua vez, pode ser obtida de fórmula construída em artigo da revista anterior: $AM = \dfrac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2 \cdot 6^2 + 2 \cdot 15^2 - 18^2}}{2} =$ $= \dfrac{\sqrt{72 + 450 - 324}}{2} = \dfrac{\sqrt{198}}{2} = \dfrac{3\sqrt{22}}{2}$. Daí: $AG = \dfrac{2}{3} AM = \sqrt{22}$ cm.

3 – A ilustração a seguir mostra um exemplar da família de circunferências obedecendo às condições impostas no enunciado. Cada centro C tem coordenadas (x, y), com $x = -R$ e $y > 0$.

Trata-se de uma parábola com vértice V na origem, com concavidade voltada para a direita e eixo de simetria FV coincidente com o eixo x.

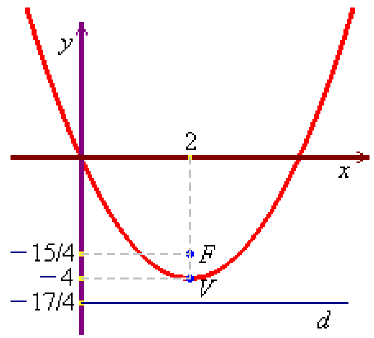


A parábola com vértice em (m, n), oriunda dessa parábola com vértice na origem, transladada horizontalmente de m e verticalmente de n, tem equação reduzida $(y - n)^2 = 4c(x - m)$, com foco à direita do vértice, e equação $(y - n)^2 = -4c(x - m)$, com foco à esquerda do vértice, de concavidade contrária, ou seja, voltada para a esquerda, ambas com eixo de simetria paralelo ao eixo x. Terão eixo de simetria paralelo ao eixo y e diretriz $y = -c$ parábolas de equação $(x - m)^2 = 4c(y - n)$, com foco acima do vértice, de concavidade para cima, e de equação $(x - m)^2 = -4c(y - n)$, com foco abaixo do vértice, de concavidade voltada para baixo.

Exemplo:

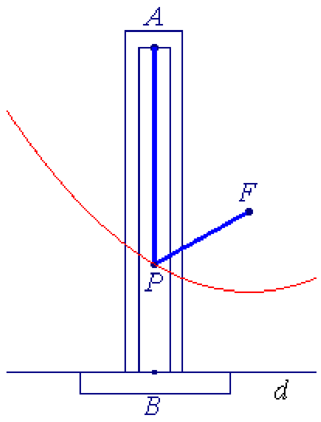
Para que determinemos o foco e a diretriz da parábola de equação $y = x^2 - 4x$, devemos deixá-la na forma $(x - m)^2 = 4c(y - n)$. Para tanto, somamos 4 aos seus membros, ficando com:

$x^2 - 4x + 4 = y + 4 \;\rightarrow\; (x - 2)^2 = y + 4$

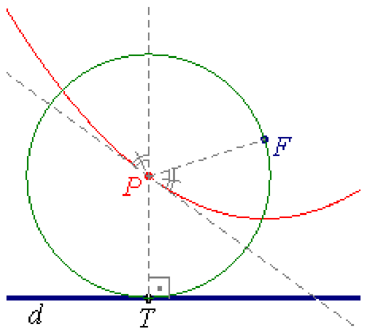


Comparando-a com a forma genérica, concluímos que seu vértice tem coordenadas $V = (2, -4)$ e que $4c = 1$, ou seja, que $c = ¼$. Daí, seu foco tem coordenadas $F = (2, -4 + ¼) = (2, -15/4)$ e sua reta diretriz d tem equação $y = -4 - ¼ = -17/4$. A figura ao lado ilustra essa situação.

O mecanismo descrito a seguir se presta a desenhar um trecho de parábola. Ele é composto de uma régua (AB), em "T", com uma fenda longitudinal, em cuja reta d de um plano deve correr sua extremidade (B). Na outra extremidade (A) é preso um fio. Um ponto fixo (F) deste plano recebe a outra ponta do fio. Mantendo um lápis na fenda (em P), com o fio esticado, desenha-se uma parábola dada por $PF = PB$ quando o fio possuir a mesma medida da régua, caso este em que a parábola é desenhada a partir de A. E existe um intervalo da reta d no qual o ponto B varia e a soma $AP + PF$ se mantém constante. É nesse intervalo que o mecanismo funciona.



A parábola pode ser construída geometricamente ponto a ponto baseada em caracterização descrita como segue. Sejam um ponto F e uma reta d que não o contém. O lugar geométrico dos centros das circunferências tangentes à reta dada e que passam pelo ponto dado é uma parábola. Para cada ponto T considerado em d, a perpendicular a essa reta, por ele, intersecta a mediatriz de TF em P, centro de uma dessas circunferências e pertencente à parábola de foco F e diretriz d, pois $PF = PT$. Além disso, a referida mediatriz é tangente, em P, à parábola construída e mais: os ângulos indicados na figura são iguais, o que tem implicações práticas que envolvem sobretudo a Ótica.



Os espelhos parabólicos estão presentes nos holofotes e em faróis de veículos, tendo a lâmpada localizada no foco do parabolóide, que reflete a luz paralelamente. Já nas antenas parabólicas e nos coletores solares, as ondas refletidas convergem no foco.

Curiosidade: belas operações, belos resultados

Eis algumas operações elementares com bonitos padrões, encontradas na Revista do Professor de Matemática nº 62 da SBM. Procure você, leitor, criar outros desses padrões.

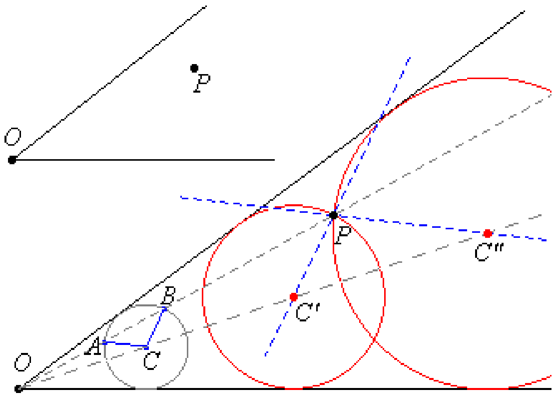
$1 \times 8 + 1 = 9$	$1 \times 9 + 2 = 11$
$12 \times 8 + 2 = 98$	$12 \times 9 + 3 = 111$
$123 \times 8 + 3 = 987$	$123 \times 9 + 4 = 1111$
$1234 \times 8 + 4 = 9876$	$1234 \times 9 + 5 = 11111$
$12345 \times 8 + 5 = 98765$	$12345 \times 9 + 6 = 111111$
$123456 \times 8 + 6 = 987654$	$123456 \times 9 + 7 = 1111111$
$1234567 \times 8 + 7 = 9876543$	$1234567 \times 9 + 8 = 11111111$
$12345678 \times 8 + 8 = 98765432$	$12345678 \times 9 + 9 = 111111111$
$123456789 \times 8 + 9 = 987654321$	$123456789 \times 9 + 10 = 1111111111$

$9 \times 9 + 7 = 88$
$98 \times 9 + 6 = 888$
$987 \times 9 + 5 = 8888$
$9876 \times 9 + 4 = 88888$
$98765 \times 9 + 3 = 888888$
$987654 \times 9 + 2 = 8888888$
$9876543 \times 9 + 1 = 88888888$
$98765432 \times 9 + 0 = 888888888$

$1 \times 1 = 1$
$11 \times 11 = 121$
$111 \times 111 = 12321$
$1111 \times 1111 = 1234321$
$11111 \times 11111 = 123454321$
$111111 \times 111111 = 12345654321$
$1111111 \times 1111111 = 1234567654321$
$11111111 \times 11111111 = 123456787654321$
$111111111 \times 111111111 = 12345678987654321$

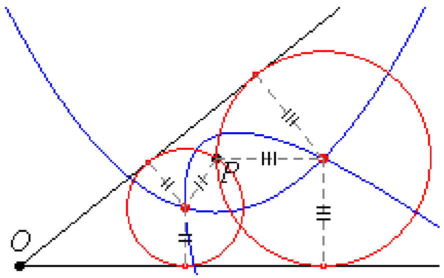
O problema de tangência que estudaremos é o seguinte:

Dado um ângulo e um ponto na região por ele abrangida, construir uma circunferência que passe por esse ponto e tangencie os lados do referido ângulo.



O caminho para a construção inicia-se com o traçado de uma circunferência auxiliar inscrita nesse ângulo, de centro *C*. As circunferências-solução são construídas por homotetia de centro *O*, cujas razões são *OP*/*OA* e *OP*/*OB*. Para obter seus centros na bissetriz *OC*, traçamos, por *P*, as paralelas a *AC* e a *BC*, como indicado na figura em questão. Note a semelhança entre os triângulos *OBC* e *OPC'* e entre *OAC* e *OPC"*.

Uma observação interessante a se ressaltar é a seguinte: cada um dos centros das circunferências-solução são equidistantes de *P* e de cada lado do ângulo dado. Assim sendo, devem esses pontos pertencer às parábolas com foco *P* e com diretrizes sendo esses lados. As intersecções entre as parábolas traçadas consistem nos centros das circunferências procuradas.



Não se trata de mais um método de construção geométrica empregado nesse problema, uma vez que parábolas são construídas geometricamente ponto a ponto, como visto em artigo desta revista. Porém, os programas computacionais de Geometria Dinâmica realizam o traçado dessa cônica satisfatoriamente. Veja acima como fica a construção.

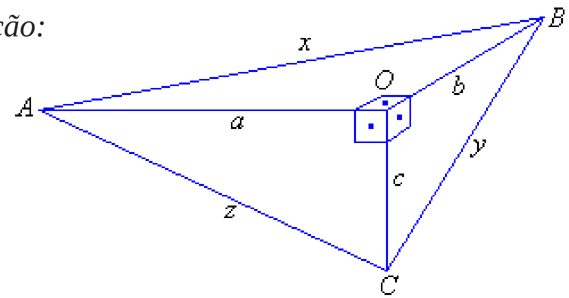
Uma generalização do teorema de Pitágoras

Consideremos um tetraedro *OABC* tri-retângulo em *O*. O volume dessa figura espacial é de fácil obtenção. De fato, basta considerar qualquer face que contenha o vértice *O* como base dessa pirâmide e a aresta perpendicular a ela como altura. Daí, é só calcular um terço do produto da medida da área dessa base pela tal altura.

Quanto à superfície dessa figura, o cálculo da área da face oposta ao vértice *O* fica facilitado se conhecermos um resultado, objeto desse artigo, pois o cálculo da área de outras faces é imediato, uma vez que são delimitadas por triângulos retângulos.

O resultado a que nos referimos diz o seguinte: o quadrado da área da face oposta a *O* é igual à soma dos quadrados das áreas das outras faces. Em outras palavras, $S_{ABC}^2 = S_{OBC}^2 + S_{AOC}^2 + S_{ABO}^2$. Trata-se de uma espécie de Teorema de Pitágoras empregado para áreas.

Demonstração:



Sabemos que $S_{ABC}^2 = p(p-x)(p-y)(p-z)$, onde *p* é o semiperímetro do triângulo *ABC* com área *S*, da fórmula de Hierão. Então:

$$S_{ABC}^2 = \frac{x+y+z}{2}\left(\frac{x+y+z}{2}-x\right)\left(\frac{x+y+z}{2}-y\right)\left(\frac{x+y+z}{2}-z\right) =$$

$$= \frac{x+y+z}{2}.\frac{x+y+z-2x}{2}.\frac{x+y+z-2y}{2}.\frac{x+y+z-2z}{2} =$$

$$= \frac{x+y+z}{2} \cdot \frac{-x+y+z}{2} \cdot \frac{x-y+z}{2} \cdot \frac{x+y-z}{2} =$$

$$= \frac{1}{16}[(y+z)^2 - x^2](x^2 + xy - xz - xy - y^2 + yz + xz + yz - z^2) =$$

$$= \frac{1}{16}[2yz + (-x^2 + y^2 + z^2)][2yz - (-x^2 + y^2 + z^2)] =$$

$$= \frac{1}{16}[4y^2z^2 - (-x^2 + y^2 + z^2)^2].$$

Como $x^2 = a^2 + b^2$; $y^2 = b^2 + c^2$; $z^2 = a^2 + c^2$, então:

$$S_{ABC}^2 = \frac{1}{16}[4(b^2 + c^2)(a^2 + c^2) - (-a^2 - b^2 + b^2 + c^2 + a^2 + c^2)^2] =$$

$$= \frac{1}{16}[4(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 + c^4) - (2c)^2] = \frac{1}{16}(4a^2b^2 + 4b^2c^2 + 4a^2c^2) =$$

$$= \frac{a^2b^2}{4} + \frac{b^2c^2}{4} + \frac{a^2c^2}{4} = \left(\frac{ab}{2}\right)^2 + \left(\frac{bc}{2}\right)^2 + \left(\frac{ac}{2}\right)^2 =$$

$= S_{OBC}^2 + S_{AOC}^2 + S_{ABO}^2$, como queríamos demonstrar.

Assim, para calcular a área total de um tetraedro com três arestas, duas a duas perpendiculares, de medidas 2, 6 e 8, assim se pode proceder:

- Áreas das faces delimitadas por triângulos retângulos:

$$S_1 = \frac{2\times 6}{2} = 6 \; ; \; S_2 = \frac{2\times 8}{2} = 8 \text{ e } S_3 = \frac{6\times 8}{2} = 24.$$

- Área da face oposta ao vértice comum aos ângulos retos:

$$S_4 = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2} = \sqrt{6^2 + 8^2 + 24^2} = \sqrt{36 + 64 + 576} = \sqrt{676} = 26.$$

Resposta: $S_t = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 6 + 8 + 24 + 26 = 64$.

CG: A homotetia em um problema de tangência

Problemas de Construção Geométrica envolvendo tangências, como aparecem na revista anterior, foram explorados pelo matemático Apolônio de Perga (262 - 190 a.C.).

Estudaremos mais um caso desses, em que uma ferramenta importante da Geometria, a *homotetia*, desencadeia a construção de maneira elegante.

Assim como uma função age em um número, produzindo sua imagem (como, por exemplo, a função regida pela lei $f(x) = 2x - 1$ que, aplicada em $x = 2$, produz a imagem $f(2) = 3$), as transformações geométricas são funções que atuam em pontos, por exemplo, do plano, produzindo outros pontos segundo uma determinada regra. A translação, a reflexão, a rotação e a homotetia são exemplos de transformações geométricas.

No plano, a homotetia de centro num ponto O e razão k (k real não nulo), aplicada em um ponto A, tem sua imagem em A' se $OA' = k \cdot OA$. E cada ponto de uma figura, por homotetia, tem como imagem pontos que compõem outra figura semelhante à de origem Por esse motivo, diz-se que a homotetia é uma transformação de semelhança.

Neste exemplo, verificamos que a imagem do triângulo ABC pela homotetia de centro O e razão $OA'/OA = 9/3 = 3$ é o triângulo $A'B'C'$. E essa razão é precisamente a razão de semelhança entre esses triângulos. Com isso:

$$\frac{A'B'}{AB} = 3$$