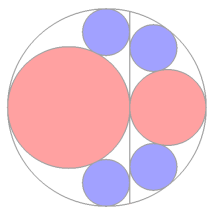


## Conteúdo

|   |    |
|---|----|
| Ao Leitor   | 01 |
| Sistema cartesiano X sistema polar                                      | 01 |
| Cálculo analítico da área de polígonos<br><i>Felipe Parise Garpelli</i> | 05 |
| II OMCA   | 08 |
| CG: alturas de trapézios como médias                                    | 10 |
| <i>Curiosidade</i> : o calendário e a sexta-feira 13                    | 12 |
| Problemas   | 13 |



Edição  
Especial

COLÉGIO  
**absoluto**  
ANGLO

**Edição, ilustrações, seções e artigos não assinados:** Calixto Garcia

Esta edição está composta em .doc, fonte *Times New Roman*, corpo 12

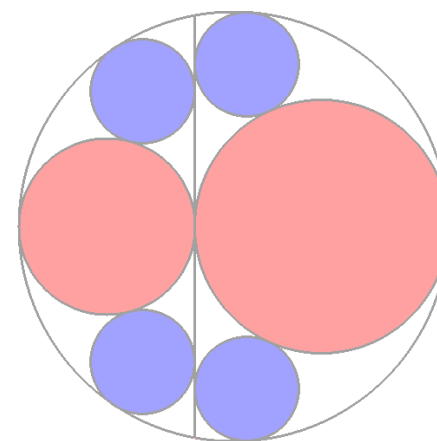
Os artigos publicados são de responsabilidade dos autores. Solicitamos que a reprodução de artigos desta obra tenha a indicação de fonte.

**Contatos:** – *Colégio Absoluto - Anglo:*  
Rua Antonio Nery, 550, Tietê, SP; A/C Prof. Calixto Garcia

– *E-mail - Prof. Calixto Garcia:*  
klixg@yahoo.com.br

# RMCA

REVISTA DE MATEMÁTICA  
DO COLÉGIO ABSOLUTO



# 13

Edição Especial

3º bimestre  
2010 - ano IV

COLÉGIO  
**absoluto**  
ANGLO

## Ao Leitor

Com satisfação, completamos o terceiro ano de nossa revista.

Estamos presenciando no conteúdo de alguns vestibulares recentes do país a (re)inclusão de uma família interessante de curvas: as *cônicas*. Motivados por esse fato, nos últimos números apresentamos de modo sucinto esse assunto.

Chegamos ao final da II OMCA. Ficamos satisfeitos com o comprometimento e a dedicação dos participantes no treinamento. O medalhista de ouro foi o aluno Alexandre Foramiglio, o de prata, Felipe Parise Garpelli, e bronze foram Marcelli Tiemi Kian e Camila de Camargo Modanez.

Boa leitura!

*Calixto Garcia*

## Sistema cartesiano x sistema polar

Ainda antes do surgimento da Geometria Analítica, desde a época de Apolônio de Perga, a Geometria tem recebido tratamento algébrico. Como evidência, nesse período encontramos algumas curvas sendo já expressas por equações literais. Essa abordagem, legitimada pelo comportamento corporativo da Matemática, acabou por constituir-se em importante aliada na investigação de propriedades das formas geométricas.

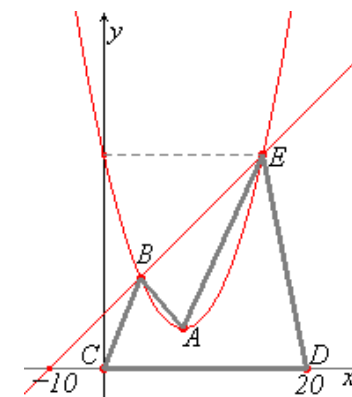
Durante séculos a Geometria foi vista com ceticismo por muitos matemáticos, motivados pelo fato de as imagens conduzirem a enganos ou esconderem aspectos visuais não imediatamente perceptíveis, como, aliás, algumas vezes já ocorrera. Chegavam a evitar a inclusão de elementos geométricos no desencadeamento de provas de proposições matemáticas. Buscavam guarida nas fórmulas que resultavam das formas em nome da segurança e da consistência.

## Problemas propostos

1 – a) Escrever na forma polar a equação cartesiana  $y = x^2$ .

b) Caracterizar a curva com a equação polar  $r = 2 \cdot \cos\theta - 4 \cdot \sin\theta$ .

2 – Obter a área do polígono  $ABCDE$  ao lado, em que a parábola tem equação  $y = x^2 - 6x + 12$  e vértice  $A$ .  
*Obs.:* figura sem escalas.



3 – Construir geometricamente um trapézio conhecidas as bases e os outros dois lados.

## Números místicos

Os números com quantidade grande de divisores quando comparado com seus vizinhos, são interessantes, especialmente na prática. Exemplos deles são os números 6, 12 (a dúzia), 24 (o número de horas do dia), 60 (o número de segundos do minuto, ou o número de minutos da hora) e 180 (o número de graus do ângulo raso). Entre outros, os sucessores dos dois menores desse rol (7 e 13) são considerados místicos. O número 13, para muitos povos, está ligado ao infortúnio e ao azar, motivação essa, devida provavelmente ao fato de a dúzia fornecer maior possibilidade de divisão, como dito, enquanto que, com uma unidade a mais, produz uma quantia que penaliza o compartilhamento, portanto, candidato a gerador de discórdias.

Uma brincadeira: invente um número qualquer de 3 algarismos; multiplique-o por 7, e depois, por 13. Agora some o resultado obtido com ele mesmo de forma deslocada, como no exemplo ao lado. Interessante, não? Tem explicação?

$$\begin{array}{r} uvx yz \\ + uvx yz \\ \hline \end{array}$$

## Problemas

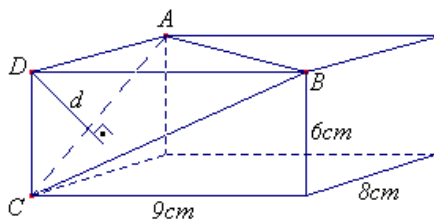
### Resolução dos problemas propostos no número anterior

1 – De resultado obtido na revista anterior, tem-se que:

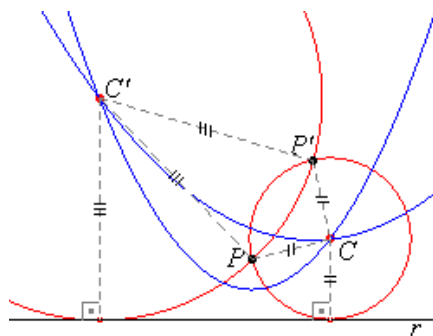
$$S_{ABC}^2 = S_{ABD}^2 + S_{ACD}^2 + S_{BCD}^2 = \left(\frac{8 \cdot 9}{2}\right)^2 + \left(\frac{6 \cdot 8}{2}\right)^2 + \left(\frac{6 \cdot 9}{2}\right)^2 = 2601.$$

Daí,  $S_{ABC} = 51\text{cm}^2$ . Como  $V_{ABCD} = \frac{S_{ABC} \cdot d}{3} = \frac{S_{ACD} \cdot BD}{3}$ , segue que

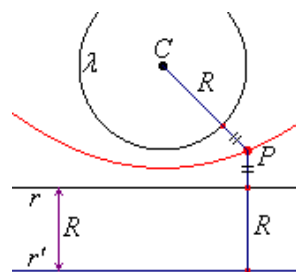
$$51d = \frac{6 \cdot 8}{2} \cdot 9, \text{ implicando em } d = \frac{72}{17} \text{ cm.}$$



2 – Cada um dos centros  $C$  e  $C'$  das circunferências procuradas resultam das intersecções entre as parábolas de focos em  $P$  e  $P'$ , nessa ordem, e diretriz  $r$ , como indicado na figura ao lado. Lembremos que tal construção não é eminentemente geométrica, uma vez que parábolas assim não o são.



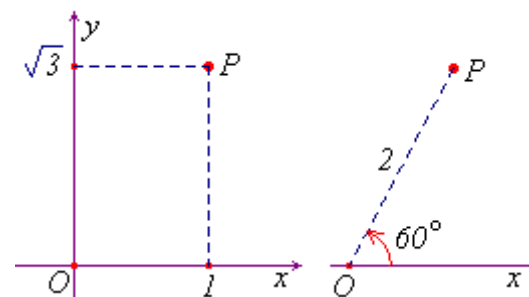
3 – Os pontos  $P$  que são equidistantes da reta  $r$  e da circunferência  $\lambda$  dadas têm a propriedade de serem equidistantes da reta  $r'$ , paralela a  $r$ , e do centro de  $\lambda$  como indicado na figura ao lado. Portanto, fazem parte de uma parábola de foco no centro  $C$  de  $\lambda$  e de diretriz  $r'$ . As retas paralelas distam a mesma medida  $R$  do raio de  $\lambda$ .



Com o amadurecimento da Álgebra esse tratamento analítico da Geometria sintética ganhou corpo. Com isso, podemos considerar que o início da Geometria Analítica se deu de maneira mais efetiva a partir do século XVII, com Pierre de Fermat e René Descartes, estudando as relações entre lugares geométricos e as equações que os caracterizavam.

Em homenagem a Descartes (*Cartesius*, em latim), a área de trabalho na qual foi desenvolvida a Geometria Analítica foi denominada *plano cartesiano*, criação essa, presente nos currículos escolares de hoje, já no Ensino Fundamental. Ali, as figuras geométricas, sobretudo as que possuem propriedades relevantes, são concebidas por equações que envolvem duas variáveis, componentes dos eixos perpendiculares que determinam esse plano. Tais eixos dividem-no em quatro regiões, as quais denominamos *quadrantes*.

Devido à complexidade da equação cartesiana de algumas curvas, os matemáticos foram criando outros sistemas de coordenadas, sendo um deles muito conhecido e consagrado por tornar simples, entre outras, as equações de espirais: o sistema de coordenadas polares. Nele, um ponto é determinado por um par de números expressando uma distância e um ângulo com referência a uma semi-reta dada. O exemplo a seguir mostra a localização de um mesmo ponto segundo o sistema cartesiano (ou retangular) e o sistema polar.



Como nos é mais familiar, no sistema cartesiano, o ponto  $P$  é determinado por um par ordenado de números que indicam a distância ao eixo  $y$  e ao eixo  $x$ , nessa ordem, a saber,  $(1, \sqrt{3})$ . No sistema polar, conforme descrito acima, notamos que o mesmo ponto  $P$  fica determinado pelo par  $(2, 60^\circ)$  ou, com o ângulo em radianos, por  $(2, \pi/3)$ .

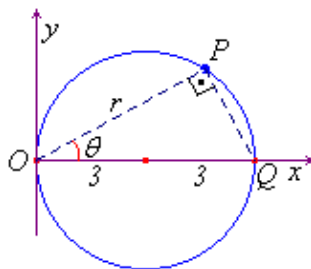
A semi-reta  $Ox$  é chamada *eixo polar* e o ponto  $O$ , o *polo*.

O exemplo que acabamos de expor nos conduz às seguintes relações generalizadas entre as coordenadas cartesianas  $x$  e  $y$  e polares  $r$  e  $\theta$  de um ponto  $P$  com respeito a esses sistemas:  $x = r \cdot \cos \theta$  e  $y = r \cdot \sin \theta$ . Como consequência disso,  $x^2 + y^2 = r^2 \cdot \cos^2 \theta + r^2 \cdot \sin^2 \theta = r^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r^2$ , ou,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Com  $x = y = 0$ , temos  $r = 0$ , para todo  $\theta$ . Denota-se o par  $(-r, \theta)$  como o simétrico de  $(r, \theta)$  em relação ao polo, ou seja,  $(r, \theta + \pi)$ . Denota-se  $(r, -\theta)$  como o simétrico de  $(r, \theta)$  segundo a reta suporte do eixo polar, ou seja,  $(r, 2\pi - \theta)$ .

Com isso, coordenadas e equações cartesianas podem ser transformadas em equivalentes polares, do tipo  $r = f(\theta)$ , e vice-versa.

### Exemplos:

**1** – A equação cartesiana da circunferência centrada em  $(3, 0)$  e com raio 3 é dada por  $(x - 3)^2 + y^2 = 9$ , ou,  $x^2 + y^2 = 6x$ . Como  $x^2 + y^2 = r^2$  e  $x = r \cdot \cos \theta$ , ficamos com  $r^2 = 6 \cdot r \cdot \cos \theta$  ou com  $r = 6 \cdot \cos \theta$ . Vejamos, pela ilustração ao lado, que a cada ângulo  $\theta$  entre 0 e  $\pi/2$  (ou  $-\theta$  entre  $-\pi/2$  e 0) está associado o ponto  $P$ , de modo que, em cada triângulo  $OPQ$  formado, se tem  $\cos \theta = r/6$ , ou  $r = 6 \cdot \cos \theta$ .



**2** – A curva com equação polar dada por  $r = \frac{3}{2 \cdot \sin \theta - \cos \theta}$  representa uma reta. De fato, sendo equivalente a  $r(2 \sin \theta - \cos \theta) = 3$  e sendo  $\sin \theta = \frac{y}{r}$  e  $\cos \theta = \frac{x}{r}$ , então,  $r \cdot \left( 2 \cdot \frac{y}{r} - \frac{x}{r} \right) = 3$ , implicando em  $2y - x = 3$ , reconhecidamente a equação cartesiana de uma reta.

**3** – A curva com equação polar dada por  $r = 2\theta$ , com  $\theta \geq 0$  é um exemplar da chamada *espiral de Arquimedes*. Nela, cada ponto  $P$  está a uma distância do polo  $O$  igual ao dobro da medida do ângulo  $\theta$ ,

### Curiosidade: o calendário e a sexta-feira 13

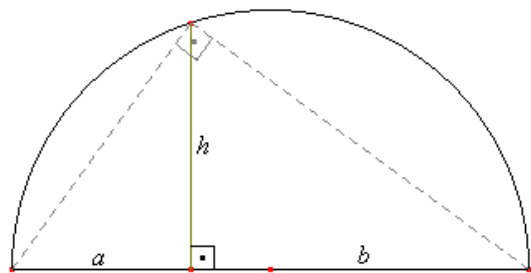
Como bons observadores que somos, desde os tempos pré-históricos, nos encantamos com a periodicidade do movimento dos astros, sobretudo do Sol e da Lua. Aliás, a partir dessas observações, acabamos por construir a nossa base de tempo e o nosso calendário.

Usamos o ciclo do movimento do Sol do amanhecer ao amanhecer para estabelecer o que chamamos *dia*. Provavelmente a *semana* tenha sido devida ao ciclo lunar. A *lunação*, composta de 4 semanas, denominamos *mês*. O período que conhecemos por *ano* foi percebido desde a antiguidade com a observação das culturas agrícolas.

O calendário *gregoriano*, em deferência ao papa Gregório XIII, é atualmente adotado pela maioria dos povos. É composto de 12 meses, sendo que o mês de fevereiro tem quantidade variável de dias para que o ano desse calendário tenha a duração aproximada do ano trópico (ano associado às estações). Ainda assim, o ano gregoriano tem cerca de 27 segundos a mais que o ano trópico, o que gera um dia a mais em 3000 anos. Ficou estabelecido que, a cada 4 anos, o mês de fevereiro deve possuir um dia a mais, isto é, 29 dias, e, a cada 400 anos, essa regra não deve ser aplicada. O ano que contém o mês de fevereiro estendido, conhecido como ano bissexto, é reconhecido matematicamente assim: se o ano indicar um número divisível por 4, ele é bissexto, exceto se terminar em dois zeros, caso em que deve ser divisível por 400. Assim sendo, por exemplo, o ano de 1896 foi bissexto, porém, 1900 não o foi. Já o ano de 2000 foi bissexto. Dessa forma, o calendário gregoriano repete-se a cada 400 anos, período no qual há 4800 dias 13, naturalmente distribuídos de forma não igual pelos 7 dias da semana. Eis a bendita (ou a maldita) distribuição:

| 2ª feira | 3ª feira | 4ª feira | 5ª feira | 6ª feira   | Sábado | Domingo |
|----------|----------|----------|----------|------------|--------|---------|
| 685      | 685      | 687      | 684      | <b>688</b> | 684    | 687     |

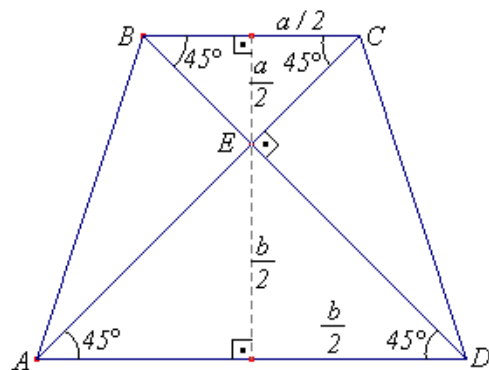
Verifique, leitor, que os triângulos  $ABC$  e  $DAB$  são semelhantes. Por isso, temos  $\frac{h}{b} = \frac{a}{h}$ , ou  $h^2 = a \cdot b$ , ou ainda,  $h = \sqrt{a \cdot b}$ . Portanto,  $h$  é a *média geométrica* de  $a$  e  $b$ , de construção simples, cuja justificativa é decorrente de relação métrica em triângulo retângulo.



Para construir o trapézio em questão é só aproveitar-se da construção ao lado, transportando o segmento  $a$  a partir da extremidade superior de  $h$ , paralelamente a  $b$ , como indicado pelo esboço anterior, e, por fim, traçar o lado que está faltando para “fechar” a figura.

Nas condições da situação exposta, e se o trapézio fosse isósceles? Neste contexto, um esboço com informações derivadas é:

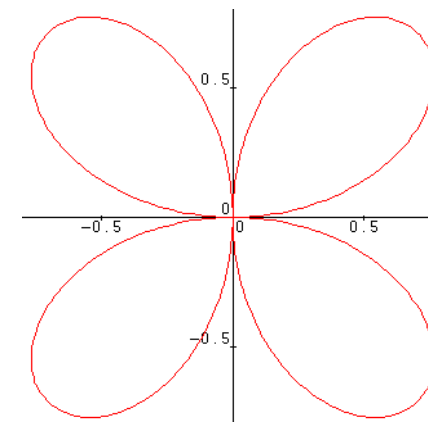
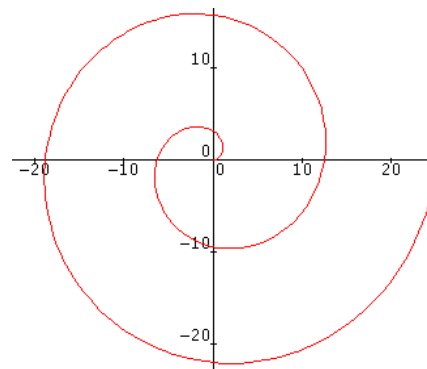
Diante dessa figura auto-explicativa, observa-se que, agora, a altura do trapézio é a *média aritmética* de  $a$  e  $b$ , de construção elementar. Com isso, para construir o trapézio em questão, é só traçar um segmento perpendicular à base  $b$ , com medida  $(a+b)/2$ , a partir de seu ponto médio. A outra extremidade desse segmento é o ponto médio da base  $a$ . Uma vez traçada, completa-se a construção do trapézio com os lados não paralelos.



Nesses dois trapézios de bases com mesmas medidas e com diagonais perpendiculares, verificamos que o segundo possui altura maior, uma vez que a média aritmética é maior que a geométrica.

em radianos, entre o eixo polar e o segmento  $OP$ . A seguir temos, à esquerda, o gráfico dessa espiral para  $0 \leq \theta \leq 4\pi$ .

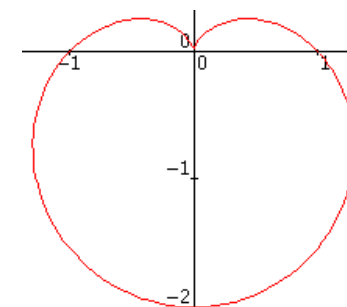
|               |   |        |        |        |        |
|---------------|---|--------|--------|--------|--------|
| $\theta$      | 0 | $\pi$  | $2\pi$ | $3\pi$ | $4\pi$ |
| $r = 2\theta$ | 0 | $2\pi$ | $4\pi$ | $6\pi$ | $8\pi$ |



**4 – Rosácea** é a denominação dos gráficos das equações polares do tipo  $r = a \cdot \text{sen}(n\theta)$  ou  $r = a \cdot \text{cos}(n\theta)$ , para  $n$  inteiro positivo. O valor de  $a$  está associado ao diâmetro da figura criada, enquanto o valor de  $n$ , ao número de “pétalas”. O gráfico de  $r = \text{sen}(2\theta)$  está acima e à direita. Eis as coordenadas de alguns pontos dessa curva na tabela abaixo, constituintes das duas “pétalas” da direita.

|                           |   |                      |         |                      |         |                       |          |                       |       |
|---------------------------|---|----------------------|---------|----------------------|---------|-----------------------|----------|-----------------------|-------|
| $\theta$                  | 0 | $\pi/6$              | $\pi/4$ | $\pi/3$              | $\pi/2$ | $2\pi/3$              | $3\pi/4$ | $5\pi/6$              | $\pi$ |
| $r = \text{sen}(2\theta)$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1       | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 0       | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | -1       | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 0     |

**5 –** Por terem a forma de um coração, as curvas dadas pelas equações polares  $r = a \cdot (1 \pm \text{sen } \theta)$  ou  $r = a \cdot (1 \pm \text{cos } \theta)$  são chamadas *cardioides*. O valor de  $a$  está associado ao tamanho do coração, por assim dizer. O gráfico ao lado refere-se à equação  $r = 1 - \text{sen } \theta$ .

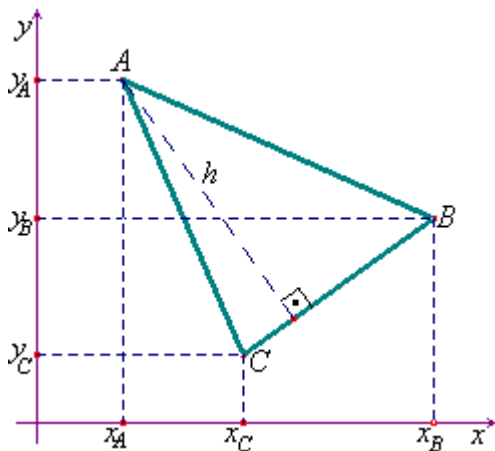


## Cálculo analítico da área de polígonos

Felipe Parise Garpelli

Primeiramente, é bom lembrar que todo polígono pode ser decomposto em triângulos. E é com essa ideia que aqui fabricaremos uma fórmula que fornece a área de um polígono no plano cartesiano.

De início, vamos construir analiticamente a fórmula da área de um triângulo. Para tanto, observemos a figura a seguir:



A base  $BC$  é dada por  $b = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2}$  e a altura  $h$  relativa a esse lado é a distância do ponto  $A$  à reta  $BC$ , dada pela fórmula  $\frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ,  $a$ ,  $b$  e  $c$  são os coeficientes da reta  $BC$  com equação na forma geral obtida como segue.

Sabemos que uma equação de  $BC$  é  $y - y_B = m(x - x_B)$ , onde  $m$  é seu coeficiente angular.

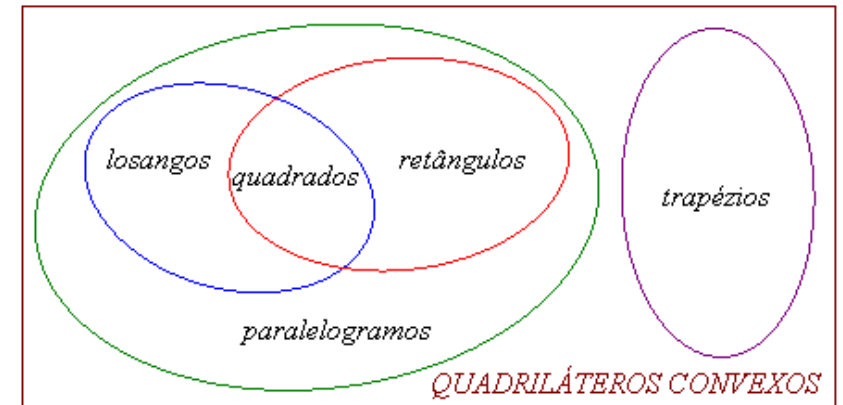
Como  $m = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B}$ , então:  $y - y_B = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B}(x - x_B)$ .

Daí,  $y(x_C - x_B) - y_B x_C + y_B x_B = x(y_C - y_B) - x_B y_C + x_B y_B$ , resultando na equação geral  $(y_B - y_C)x + (x_C - x_B)y + x_B y_C - x_C y_B = 0$ .

Com isso, sendo  $a = y_B - y_C$ ,  $b = x_C - x_B$  e  $c = x_B y_C - x_C y_B$ , a altura  $h$  vale  $\frac{|(y_B - y_C)x_A + (x_C - x_B)y_A + x_B y_C - x_C y_B|}{\sqrt{(y_B - y_C)^2 + (x_C - x_B)^2}}$ .

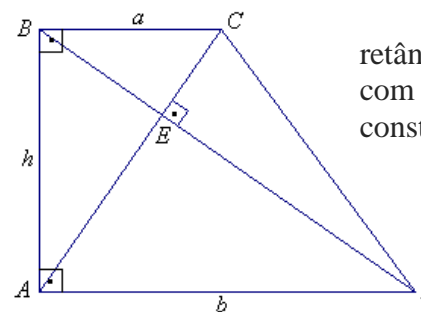
## CG: alturas de trapézios como médias

Os quadriláteros convexos podem ser classificados conforme o diagrama a seguir:



Enquanto os paralelogramos possuem dois pares de lados opostos paralelos, os trapézios possuem apenas um par, apesar de encontrarmos autores que acatam a definição de trapézio sem a palavra acima grifada, com isso, abrangendo o conjunto formado pelos paralelogramos.

Quando o trapézio apresenta ângulo reto, é denominado trapézio retângulo. Se os lados não paralelos têm medidas iguais, é dito isósceles e, em consequência disso, suas diagonais são congruentes.



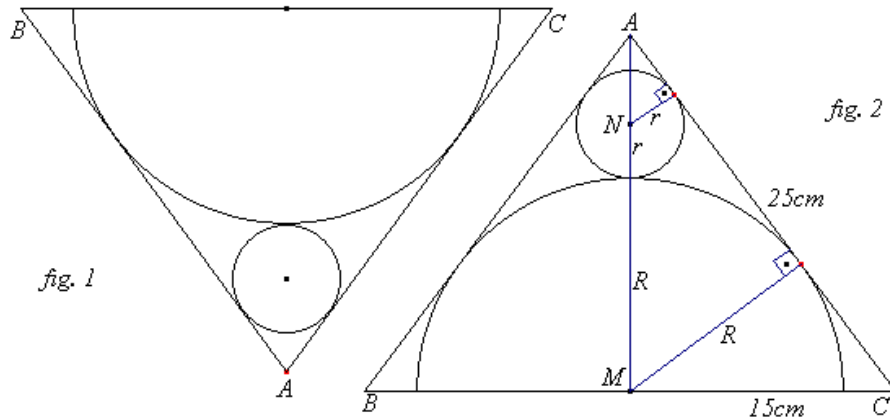
Vamos agora imaginar um trapézio retângulo com seus lados paralelos dados e com suas diagonais perpendiculares. Como construí-lo geometricamente?

Observemos o esboço ao lado vamos encontrar uma expressão que forneça a sua altura em função dos seus lados dados.

$$\frac{a^2 + 2a}{a^2 - 4} = \frac{a(a+2)}{(a-2)(a+2)} = \frac{a}{a-2} = \frac{a-2+2}{a-2} = \frac{a-2}{a-2} + \frac{2}{a-2} =$$

$$= 1 + \frac{2}{a-2},$$
 que é inteiro se  $\frac{2}{a-2}$  o for, isto é, se  $a-2$  for um divisor de 2. Com isso, tem-se:  $a-2 \in \{-2, -1, 1, 2\}$ , ou  $a \in \{0, 1, 3, 4\}$ , ou ainda,  $\frac{a}{a-2} \in \{0, -1, 3, 2\}$ .

**4 – O triângulo ABC da figura 1 abaixo é tal que BC = 30cm e AB = AC = 25cm. A semicircunferência e a circunferência nele inscritas são tangentes. Calcular a medida do raio de cada uma.**



No triângulo retângulo AMC da figura 2,  $AM^2 + 15^2 = 25^2$ , ou  $AM = 20$ cm. Nele também se tem, de outra relação métrica,  $25 \cdot R = 15 \times 20$ , isto é,  $R = 12$ cm. Já, da semelhança entre os triângulos de hipotenusas AM e AN = 20 - 12 - r = 8 - r, tem-se:  $\frac{20}{12} = \frac{8-r}{r} \rightarrow 5r = 24 - 3r \rightarrow r = 3$ cm.

Após a obtenção de R, alguns alunos calcularam r de maneira elegante, por meio de áreas, a partir da equação  $S_{ABC} = 2 \cdot S_{ANC} + S_{BNC}$ .

Então, a área S do triângulo ABC, dada por  $\frac{b \cdot h}{2}$ , fica assim:

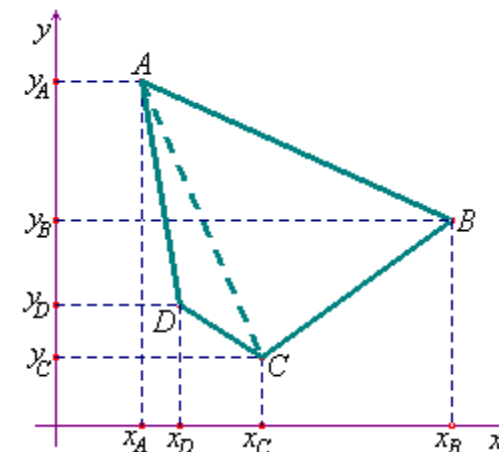
$$\frac{\sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2}}{2} \cdot \frac{|(y_B - y_C)x_A + (x_C - x_B)y_A + x_B y_C - x_C y_B|}{\sqrt{(y_B - y_C)^2 + (x_C - x_B)^2}}$$

Após simplificação e distributivas, a expressão acima transforma-se em  $S = \frac{1}{2} \cdot |x_A y_B - x_A y_C + x_C y_A - x_B y_A + x_B y_C - x_C y_B|$ , ou ainda, em  $S = \frac{1}{2} \cdot |x_A y_B + x_B y_C + x_C y_A - (x_B y_A + x_C y_B + x_A y_C)| = \frac{1}{2} \cdot |D|$ ,

onde  $D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$ . Note que a disposição  $\begin{Bmatrix} x_A & x_B & x_C & x_A \\ y_A & y_B & y_C & y_A \end{Bmatrix}$

dessas coordenadas confere maior agilidade no cálculo desse determinante, efetuado por meio dos produtos “em diagonais”. Verifique, até com exemplos, que o sinal do determinante é negativo se os pontos são tomados no sentido horário, e positivo, em caso contrário.

Na figura abaixo, o quadrilátero ABCD foi dividido em dois triângulos cujas áreas são calculadas, cada qual, conforme o raciocínio utilizado acima. Com isso, teremos:



$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{CDA}$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot |D_1| + \frac{1}{2} \cdot |D_2|$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot (|D_1| + |D_2|),$$

onde  $D_1$  e  $D_2$  são os determinantes associados às coordenadas dos vértices dos respectivos triângulos, dos quais desejamos obter suas áreas. E, se os vértices de cada triângulo forem tomados no mesmo sentido para compor a referida disposição,  $D_1$  e  $D_2$  terão o mesmo si-

nal. Disso acarreta que  $|D_1| + |D_2| = |D_1 + D_2|$ . [ Com esses números possuindo sinais diferentes, teríamos a chamada desigualdade triangular, a saber,  $|D_1| + |D_2| > |D_1 + D_2|$  ]

Utilizando-se da disposição das coordenadas entre chaves em lugar do símbolo do determinante, podemos escrever assim, então:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot \left\{ \begin{matrix} x_A & x_B & x_C & x_A \\ y_A & y_B & y_C & y_A \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} x_A & x_C & x_D & x_A \\ y_A & y_C & y_D & y_A \end{matrix} \right\}$$

Daí,  $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot |x_{AYB} + x_{BYC} + x_{CYA} - x_{BYA} - x_{CYB} - x_{AYC} + x_{AYC} + x_{CYD} + x_{DYA} - x_{CYA} - x_{DYC} - x_{AYD}|$  que, após simplificações, fica  $\frac{1}{2} \cdot |x_{AYB} + x_{BYC} - x_{BYA} - x_{CYB} + x_{CYD} + x_{DYA} - x_{DYC} - x_{AYD}|$ , ou  $\frac{1}{2} \cdot |x_{AYB} + x_{BYC} + x_{CYD} + x_{DYA} - x_{BYA} - x_{CYB} - x_{DYC} - x_{AYD}|$  que, por sua vez, pode receber uma notação, extensão da anteriormente criada,

ficando assim expressa:  $\frac{1}{2} \cdot \left\{ \begin{matrix} x_A & x_B & x_C & x_D & x_A \\ y_A & y_B & y_C & y_D & y_A \end{matrix} \right\}$ , sendo cons-

truída com a colocação das coordenadas obedecendo uma ordem cíclica dos vértices do quadrilátero em questão.

Criemos um símbolo para a soma dos produtos gerados acima:

$$\left\{ \begin{matrix} x_A & x_B & x_C & x_D & x_A \\ y_A & y_B & y_C & y_D & y_A \end{matrix} \right\} \rightarrow \left\langle \begin{matrix} x_A & x_B & x_C & x_D \\ y_A & y_B & y_C & y_D \end{matrix} \right\rangle$$

A generalização dessa fórmula para o cálculo da área  $S$  de um polígono  $P_1P_2P_3\dots P_n$  do plano cartesiano, de coordenadas  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$ , ...,  $(x_n, y_n)$ , com esses vértices, nessa ordem, tomados no sentido anti-horário, fica dada por:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \left\langle \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_n \end{matrix} \right\rangle$$

Tal fórmula se aplica a qualquer polígono, convexo ou não.

## II OMCA

Estamos contentes com o desempenho e a desenvoltura que os participantes deste torneio apresentaram, sobretudo num assunto novo que estudamos nos treinamentos e que foi abordado em artigo da **RMCA 10**: a *congruência modular*.

A seguir estão as questões resolvidas da prova da 2ª fase:

**1** – Mostre que  $15^{51} + 5^{52}$  é divisível por 8.

Como  $16 \equiv_8 0$ , então  $15 \equiv_8 -1$  e, daí,  $15^{51} \equiv_8 (-1)^{51} = -1$ . Por outro lado, como  $24 \equiv_8 0$ , então  $25 \equiv_8 1$  e, daí,  $5^{52} = (5^2)^{26} = 25^{26} \equiv_8 1^{26} = 1$ . Com isso, concluímos que  $15^{51} + 5^{52} \equiv_8 -1 + 1 = 0$ , ou que  $15^{51} + 5^{52}$  é divisível por 8.

Este fato também pode ser demonstrado se conhecermos os três últimos algarismos da referida soma. Verifica-se que de  $15^n$  são 3, 7 e 5, nessa ordem, para  $n$  ímpar maior que 1, e de  $5^n$  são 6, 2 e 5, nessa ordem, para  $n$  par maior que 2. Assim sendo,  $15^{51} + 5^{52}$  termina em 000, o que é condição suficiente para que seja um múltiplo de 8.

**2** – Efetue: a)  $\frac{1}{5} - \frac{1}{10}$ ; b)  $\frac{1}{10} - \frac{1}{15}$ ; c)  $\frac{1}{5 \times 10} + \frac{1}{10 \times 15} + \dots + \frac{1}{95 \times 100}$

$$a) \frac{1}{5} - \frac{1}{10} = \frac{10-5}{5 \times 10} = \frac{5}{5 \times 10} \quad b) \frac{1}{10} - \frac{1}{15} = \frac{15-10}{10 \times 15} = \frac{5}{10 \times 15}$$

$$c) \frac{1}{5 \times 10} + \frac{1}{10 \times 15} + \dots + \frac{1}{95 \times 100} = \frac{1}{5} \cdot \left( \frac{5}{5 \times 10} + \frac{5}{10 \times 15} + \dots + \frac{5}{95 \times 100} \right) = \frac{1}{5} \cdot \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{15} + \dots + \frac{1}{95} - \frac{1}{100} \right) = \frac{1}{5} \cdot \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{100} \right) = \frac{1}{5} \cdot \frac{20-1}{100} = \frac{19}{500}$$

**3** – Para  $a$  inteiro, encontrar os valores inteiros de  $\frac{a^2 + 2a}{a^2 - 4}$ .