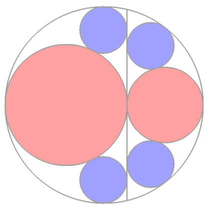
Conteúdo



Edição, ilustrações, seções e artigos não assinados: Calixto Garcia

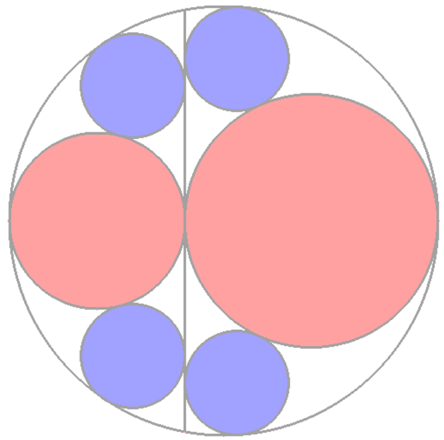
Esta edição está composta em *.doc*, fonte *Times New Roman*, corpo *12*

Contatos: – *Colégio Absoluto - Anglo:*
Rua Antonio Nery, 550, Tietê, SP; A/C Prof. Calixto Garcia

– *E-mail - Prof. Calixto Garcia:*
klixg@yahoo.com.br

RMCA

REVISTA DE MATEMÁTICA
DO COLÉGIO ABSOLUTO



15

1º bimestre
2011 · ano IV

Ao Leitor

Desejamos a todos um ótimo 2011!

Em breve, estaremos informando-lhes a programação olímpica, como todo início de ano fazemos. Organizamos a OMCA e o professor Carrarinho prepara os interessados para a OMU.

Mais uma vez fomos felizes em apresentar-lhes artigos com conteúdos diretamente ligados aos abordados nos principais vestibulares do país, tal como o que tratou de gráficos de funções.

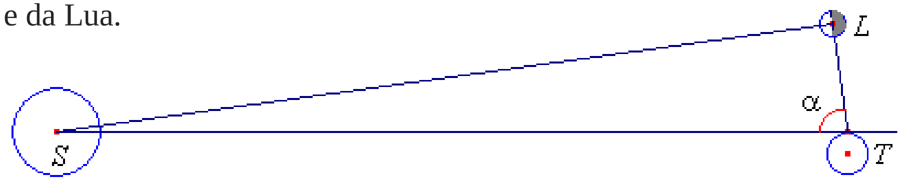
Boa leitura!

Calixto Garcia

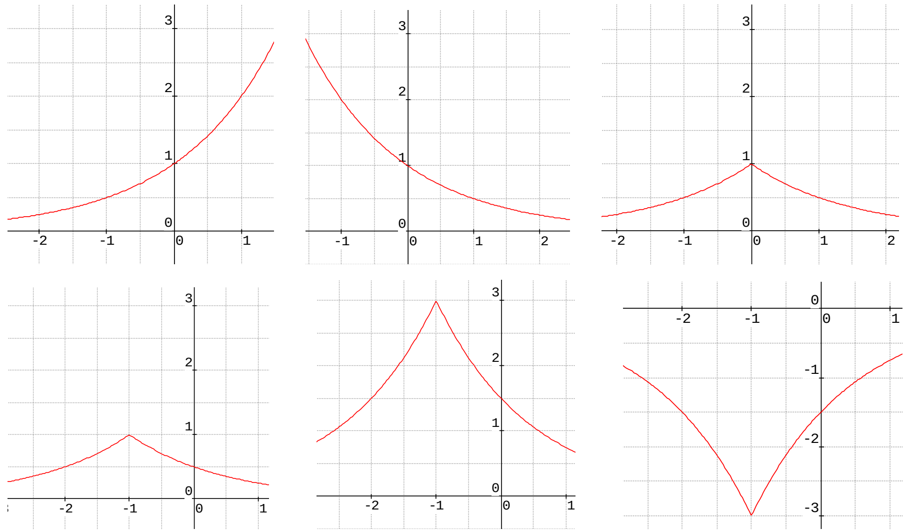
Distâncias astronômicas I

A Astronomia é uma ciência tão antiga quanto a Matemática. Ainda antes de Cristo nascer, astrônomos como Aristarco de Samos e Eratóstenes de Cirene calcularam várias medidas, tais como os raios da Lua e da Terra e as distâncias Terra-Lua-Sol (T - L - S).

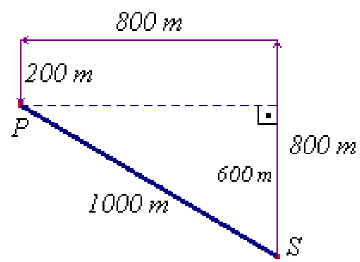
Aristarco estimou em cerca de 87° (hoje, sabemos ser de aproximadamente 89°51’) o ângulo α de visão entre a Lua e o Sol no momento em que a Lua está exatamente meio cheia, ao nascer ou ao pôr-do-sol. Com esse dado, pôde avaliar as distâncias relativas do Sol e da Lua.

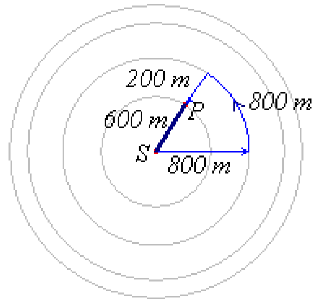


Em números atuais, a distância do Sol à Terra é de cerca de 380 vezes a que nos separa da Lua, valor aproximado de *sec*(89°51’).



3 – A figura da esquerda mostra a distância (PS = 1 km) que ficaríamos do polo sul se a superfície do planeta fosse plana. A figura da direita mostra essa real distância (PS = 600 km), considerando a esfericidade da Terra.





Problemas propostos

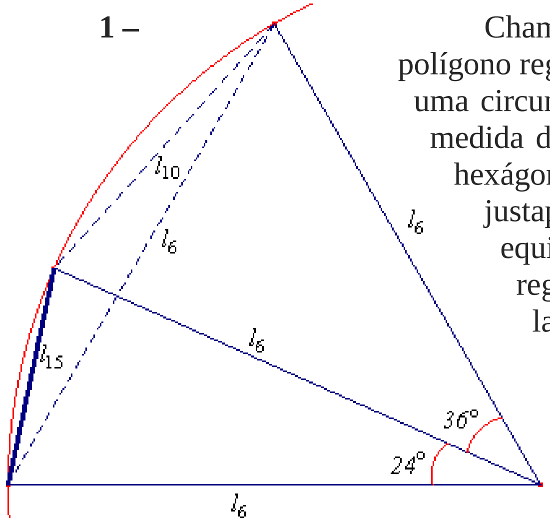
1 – Como Aristarco estimou a distância Terra-Lua? (pesquise)

2 – Justificar a forma da espírica segundo os parâmetros a e c.

3 – Obter, por construção geométrica, o ponto que “vê” os três lados de um triângulo sob ângulos de medidas iguais.

Problemas

Resolução dos problemas propostos no número anterior



1 – Chamando de l_n o lado de um polígono regular de n lados inscrito em uma circunferência, temos que l_6 é a medida de seu raio, uma vez que o hexágono regular é resultado da justaposição de seis triângulos equiláteros. Como o decágono regular (com construção do lado na revista anterior) tem ângulo central de 36° e o hexágono regular, 60°, e que a diferença entre eles é ângulo central de um pentadecágono regular. Essa figura fornece a ideia para a construção de seu lado.

2 – A sequência de passos a seguir mostra um caminho para a construção do gráfico de $f(x) = -3\cdot 2^{-|x+1|}$.

$$f_1(x) = 2^x \;\rightarrow\; f_2(x) = f_1(-x) = 2^{-x} \;\rightarrow\; f_3(x) = f_2(|x|) = 2^{-|x|} \;\rightarrow$$

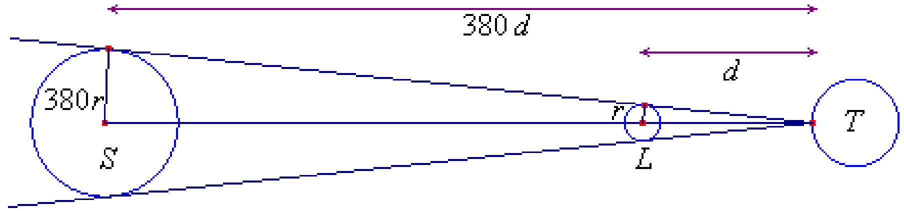
$$f_4(x) = f_3(x+1) = 2^{-|x+1|} \;\rightarrow\; f_5(x) = 3\cdot f_4(x) = 3\cdot 2^{-|x+1|} \;\rightarrow$$

$$f_6(x) = -f_5(x) = -3\cdot 2^{-|x+1|} = f(x)$$

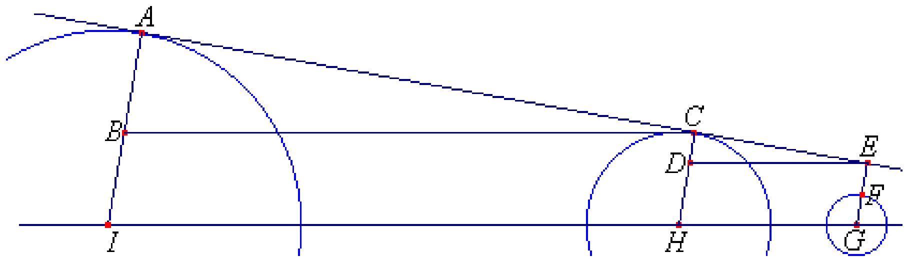
Iniciando-se pela função exponencial $y = 2^x$, efetuamos 5 alterações gráficas, a saber: 1) inversão em relação ao eixo y; 2) reflexão da porção de domínio positivo em relação ao eixo y; 3) deslocamento horizontal para a esquerda de 1 unidade; 4) alongamento vertical de 3 vezes; 5) inversão em relação ao eixo x.

A sequência de gráficos a seguir ilustra tais alterações:

Graças aos tamanhos aparentes do Sol e da Lua serem praticamente iguais para um observador na Terra, podemos concluir que o diâmetro do Sol é de cerca de 380 vezes o da Lua. Esse fato decorre de semelhança entre triângulos que se pode notar na figura abaixo.



Por meio de observação de eclipses lunares, Aristarco estimou ser a sombra da Terra, projetada à distância da Lua, cerca de 2 vezes o tamanho da Lua (em dados mais atuais, em torno de 8/3). Com isso, pôde também comparar os tamanhos do Sol e da Lua com o da Terra. A seguir apresentamos, de modo simplificado, os cálculos que conduziram a tal comparação, aqui, com valores mais atualizados.



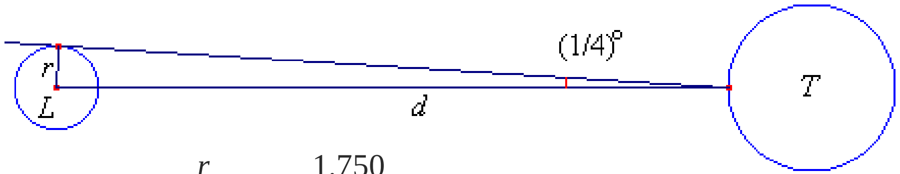
Os pontos G, H e I são os centros da Lua, da Terra e do Sol, nessa ordem; $DH = EG$ e $(3/8)\cdot EG = FG$ é o raio da Lua (R_L); $CH = BI$ é o raio da Terra (R_T) e AI é o raio do Sol (R_S). Os triângulos ABC e CDE, são semelhantes. Ainda, $CD = R_T - (8/3)\cdot R_L$; $AB = R_S - R_T$ e a razão de semelhança entre os referidos triângulos é de cerca de 380, quociente aproximado entre $BC = HI$ e $DE = GH$, ou entre R_S e R_L.

Disso tudo: $R_S - R_T = AB = 380\cdot CD = 380\cdot[R_T - (8/3)\cdot R_L]$. Como $R_S = 380\cdot R_L$, então $380\cdot R_L - R_T = 380\cdot R_T - (3040/3)\cdot R_L \rightarrow (4180/3)\cdot R_L = 381\cdot R_T \;\rightarrow\; R_T / R_L \cong 3{,}66 \;\rightarrow\; R_S / R_T = 380/3{,}66 \cong 104$.

Agora, uma vez conhecida a medida do raio do nosso planeta, teremos as medidas dos raios do Sol e da Lua. E essa medida foi obtida pelo astrônomo Eratóstenes, nos idos de 240 a.C., com precisão muito melhor que as de até então. Observou que enquanto em Siene (hoje Asuam, no Egito) o Sol estava a pino, a 5.000 estádios ao norte (1 estádio = 0,1 milha), em Alexandria, o ângulo de incidência do Sol era de aproximadamente 1/50 do círculo, ou seja, de 7,2°. Com isso, concluiu que o comprimento da Terra era de 5.000×50 = 250.000 estádios, ou 25.000 milhas, ou ainda, cerca de 40.000 km, o que resulta em um raio terrestre de cerca de 6.400 km. Assim, os raios da Lua e do Sol são medidas próximas de:

$R_L = 6.400/3{,}66 = 1.750$ km e $R_S = 6.400 \times 104 = 665.600$ km.

Como o tamanho angular da Lua é estimado em (½)°, pela observação da figura a seguir, podemos obter a distância Terra-Lua.



$$d = \frac{r}{tg(1/4)^\circ} \cong \frac{1.750}{0{,}00436} \cong 400.000 \text{ km.}$$

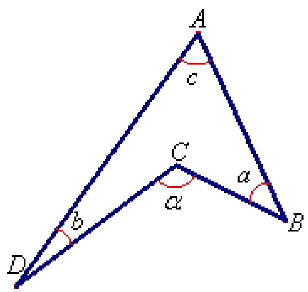
Devido à excentricidade na órbita da Lua, essa distância varia, ficando em torno de 384.000 km. Como a distância Terra-Sol é de cerca de 380 vezes a distância Terra-Lua, estamos a aproximadamente 150 milhões de quilômetros do Sol, distância esta que batizamos de Unidade Astronômica (UA). Aliás, é interessante que criemos unidades superiores, tais como o *ano-luz* e o *parsec*, pois necessitamos delas para medições de distâncias astronômicas, sob pena de trabalharmos com números excessivamente grandes. Abordaremos essas unidades na 2ª parte deste artigo, na próxima edição da **RMCA**.

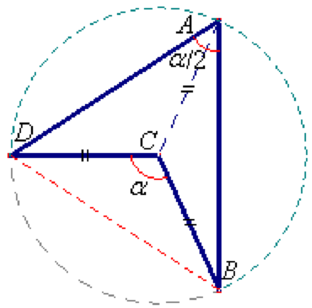
Referência Bibliográfica

- BOYER, C. B. *História da Matemática*. Edgard Blücher, São Paulo, 1996.

CG: arco capaz

No quadrilátero *ABCD* abaixo, não é difícil mostrar que o ângulo α tem medida igual à da soma $a + b + c$. E se o vértice *C* for equidistante dos outros vértices, também não é difícil concluir que a medida de *c* é a metade da de α. Aliás, neste caso, *C* é o centro de uma circunferência à qual pertencem *A*, *B* e *D*, e mais: qualquer outro ponto do arco *BD* dela, que contém o ponto *A*, "verá" a corda *BD* sob ângulo com medida $\alpha/2$. Em outras palavras, o lugar geométrico dos pontos que "veem" um segmento sob determinado ângulo é um arco de circunferência. Ele é denominado *arco capaz* desse ângulo em relação a esse segmento.

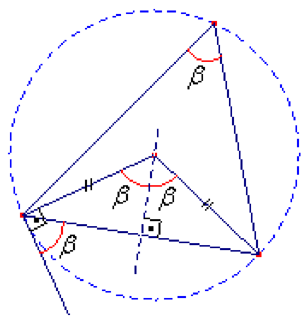


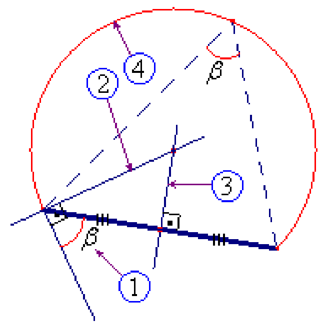


Em posse de um ângulo e de um segmento, como construí-lo?

Analise a figura da esquerda. Ela lhe servirá como auxílio.

Na figura da direita encontra-se a sequência da construção.





Calculando a real taxa de juros

Na **RMCA 09**, página 3, fabricamos uma fórmula que envolve o montante (M) de um financiamento, o valor de suas parcelas fixas (P) a serem pagas por certo período (n) de tempo e $j = 1 + i$, sendo i a taxa de juros. Ali, deixamos claro ao leitor que o valor de cada prestação, devido a taxas próprias desse tipo de transação financeira, pode ser ligeiramente maior que o obtido nos cálculos. Acontece que, em se considerando tarifas abusivas, para períodos relativamente pequenos, esse cálculo nos revela taxas de juros espantosas.

Analisemos um financiamento de 8.000 reais a ser pago em 6 parcelas mensais, com entrada, à taxa mensal de juros de 1,5%. Da nossa fórmula, $\dfrac{j^n - 1}{j^n - j^{n-1}} = \dfrac{M}{P}$, vem: $\dfrac{1{,}015^6 - 1}{1{,}015^6 - 1{,}015^5} = \dfrac{8000}{P}$, de onde de $P \cong 1.383$ reais.

Com a cobrança de cerca de 1.000 reais da famigerada (e ilegal) *tarifa de abertura de crédito*, a *TAC*, o montante financiado passa a ser de 9.000 reais que, com os mesmos cálculos acima, conduz às prestações fixas de $P \cong 1.556$ reais.

Com esse valor para cada parcela, é possível encontrar a verdadeira taxa de juro cobrada nesse negócio a partir da equação $q = \dfrac{j^6 - 1}{j^6 - j^5} = \dfrac{8000}{1556} \cong 5{,}14$. Da tabela a seguir, vemos que o valor de j está compreendido entre 1,070 e 1,065. Valendo-se de interpolação

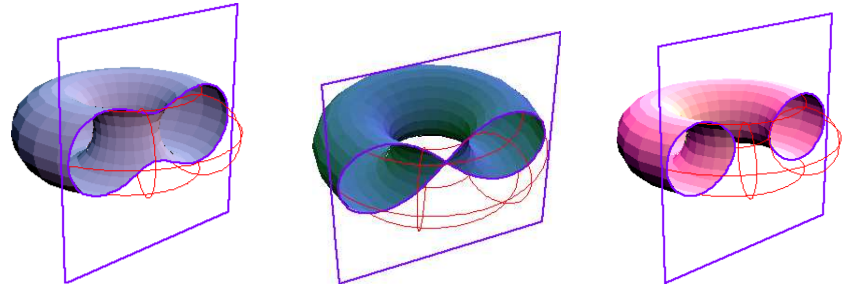
j	***q***
1,070	5,10
1,065	5,16

linear, temos que $\dfrac{5{,}16 - 5{,}10}{1{,}070 - 1{,}065} = \dfrac{5{,}16 - 5{,}14}{j - 1{,}065}$, conduzindo a $j \cong 1{,}066$, ou a escorchantes juros de 6,6%.

Conclusão: anúncios de financiamentos com taxas de juros irrisórias ou até mesmo nulas, em se operando com tarifas abusivas e por períodos curtos, mascaram taxas absurdamente altas.

As espíricas

Assim são denominadas curvas que resultam de convenientes intersecções entre um plano e um toro, chamado pelos gregos de *speira* (ver figuras abaixo, obtidas de *xahlee.org*). Essas curvas foram descritas pelo grego Perseu, por volta de 150 a.C. Viriam a ser mais detalhadas com o advento da Geometria Analítica, no século XVII.



Devido ao aspecto que podem apresentar, também são chamadas de ovais ou elipses de Cassini, em alusão ao matemático e astrônomo ítalo-francês Giovanni Domenico Cassini, que as estudou no ano de 1680. Nessa ocasião, Cassini propôs substituir, sem sucesso, a trajetória elíptica de Kepler descrita pela Terra em relação ao Sol.

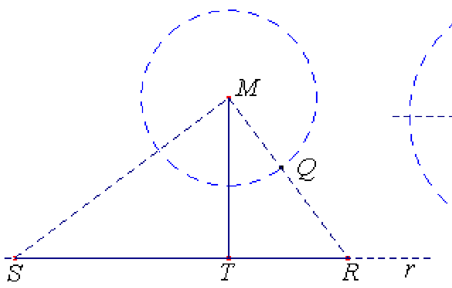
Por muitas contribuições de Cassini, sobretudo à astronomia, em sua homenagem, em 1977 foi lançada uma sonda espacial com seu nome, numa missão entre as agências espaciais norte-americana, européia e italiana.

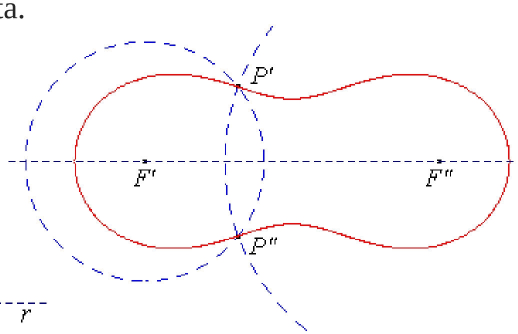
As espíricas podem ser definidas como o lugar geométrico dos pontos de um plano cujo produto das distâncias a dois pontos fixos desse plano é constante. Os pontos fixos são os focos da espírica.

Da ilustração acima, observe que, conforme a posição do plano secante ao toro, a curva gerada pode assumir a forma de duas curvas fechadas disjuntas, uma curva única fechada, ou uma *lemniscata*, do latim *lemniscus* que significa fita com laço.

Em 1694, Jacques Bernoulli escreveu sobre a lemniscata em uma espécie de periódico científico. Na ocasião, desconhecia o trabalho de Cassini com tais curvas. Essa curva, em particular, acabou por levar seu nome: a *lemniscata de Bernoulli*.

As espíricas podem ser construídas com o auxílio de um programa de Geometria Dinâmica, observando-se a propriedade que seus pontos possuem, como exposta.





Para tanto, podemos nos valer de uma relação métrica do triângulo retângulo, representado na figura acima da esquerda por *RMS*, retângulo em *M*, com altura *MT*. Dela, se tem: $MT^2 = RT \cdot ST$. Fixado *M* e a distância à reta *r*, enquanto *Q* passeia na porção da circunferência indicada, a reta *MQ* e sua perpendicular, determinam em *r* os pontos *R* e *S*, com $RT \cdot ST$ fixo. Transportando essa coleção de pares de fatores para a figura da direita, cada qual como raio de circunferências centradas em *F'* e *F"* dados, criamos as intersecções destas, *P'* e *P"*. Naturalmente, se tem $F'P' \cdot F''P' = F'P'' \cdot F''P''$ constante. Isso garante que *P'* e *P"* pertencem à espírica.

Dependendo da distância entre os focos (*F'F"*) e o valor do produto citado (MT^2), a espírica adquire as formas peculiares: designando por $2c$ e a^2 estas medidas, nesta ordem, assume a forma de duas curvas fechadas disjuntas se $c > a$, uma curva única fechada se $c < a$, ou a lemniscata se $c = a$.

Vamos obter uma equação cartesiana dessa curva pondo os focos no eixo *x*, equidistantes da origem, e adotando as tais medidas.

Sendo, então, $F'\ (-c,\ 0)$, $F''\ (c,\ 0)$, $MT = a$ e $P\ (x,\ y)$ um ponto dessa curva, de $F'P \cdot F''P = MT^2$ se tem:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2$$

$$\left((x+c)^2 + y^2\right) \cdot \left((x-c)^2 + y^2\right) = a^4$$

$$(x+c)^2 (x-c)^2 + \left((x+c)^2 + (x-c)^2\right) y^2 + y^4 = a^4$$

$$\left(x^2 - c^2\right)^2 + 2\left(x^2 + c^2\right) y^2 + y^4 = a^4$$

$$x^4 - 2c^2x^2 + c^4 + 2x^2y^2 + 2c^2y^2 + y^4 = a^4$$

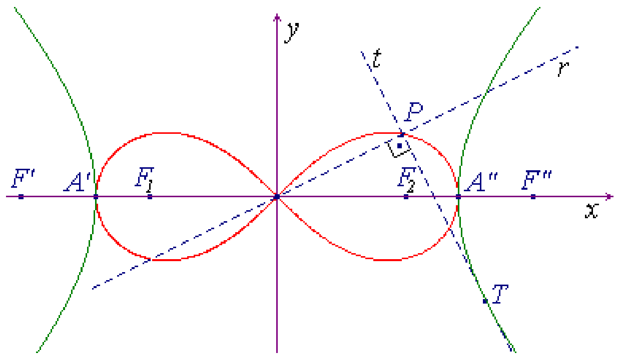
$$\left(x^2 + y^2\right)^2 - 2c^2\left(x^2 - y^2\right) = a^4 - c^4.$$

Em se tratando de lemniscata ($a = c$), a equação cartesiana fica assim: $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2c^2\left(x^2 - y^2\right)$.

Para obter a equação polar da lemniscata, lembremos que $x^2 + y^2 = r^2$, em que $x = r \cdot \cos\theta$ e $y = r \cdot \mathrm{sen}\theta$. Com isso:

$$r^4 = 2c^2(r^2\cos^2\theta - r^2\mathrm{sen}^2\theta) = 2c^2r^2\cos(2\theta) \text{ ou } r^2 = 2c^2\cos(2\theta)$$

Denomina-se *podária* de uma curva, em relação a um ponto fixo, o lugar geométrico das intersecções entre as retas tangentes à curva e as perpendiculares a elas, traçadas pelo referido ponto fixo.



Pode-se provar que a podária de uma hipérbole equilátera em relação ao seu centro é uma lemniscata de Bernoulli. Ainda, quanto a seus focos, prova-se que $2F_1F_2 = F'F''$.