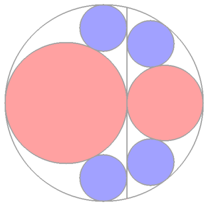
Conteúdo



Edição, ilustrações, seções e artigos não assinados: Calixto Garcia

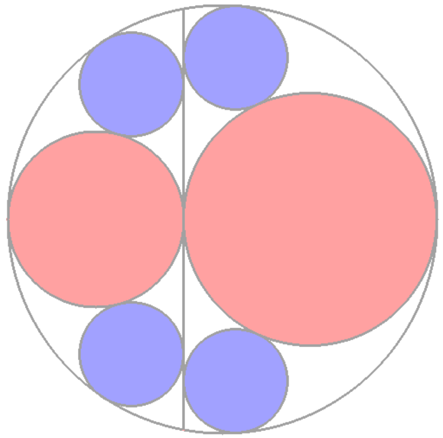
Esta edição está composta em *.doc*, fonte *Times New Roman*, corpo *12*

Contatos: – *Colégio Absoluto - Anglo:*
Rua Antonio Nery, 550, Tietê, SP; A/C Prof. Calixto Garcia

– *E-mail - Prof. Calixto Garcia:*
klixg@yahoo.com.br

RMCA

REVISTA DE MATEMÁTICA
DO COLÉGIO ABSOLUTO



16

2º bimestre
2011 · ano IV

COLÉGIO absoluto ANGLO

Ao Leitor

Parabenizamos os alunos participantes da Olimpíada de nossa escola pela dedicação e comprometimento dispensados. Esperamos ter ampliado seus conhecimentos em matemática e desenvolvido ainda mais o gosto especial por essa ciência.

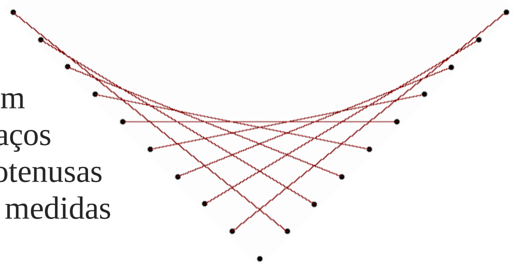
Por motivo de força maior, teremos que descontinuar por ora a edição de nossa revista. Tão logo houver disponibilidade deste editor, retomaremos esse projeto. Agradecemos muito às pessoas que prestigiaram e colaboraram conosco ao longo desses quatro anos.

Boa leitura e até mais!

Calixto Garcia

Parábolas envolventes

Quem nunca viu ou até mesmo confeccionou na escola trabalhos artísticos que consistiam em unir com barbantes pregos fixados em uma base plana, seguindo alguma regularidade? Entre vários desse tipo está a construção ilustrada a seguir, a qual pretendemos explorar um pouco.

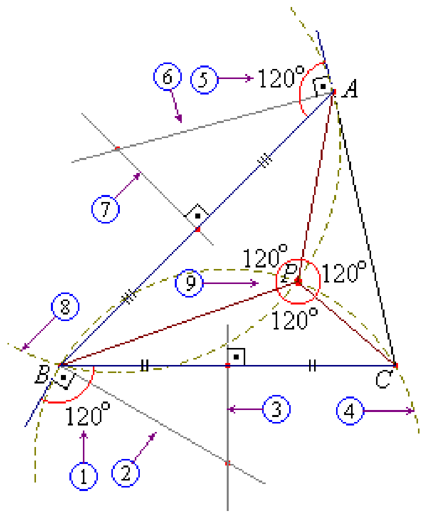


Aqui, temos pregos igualmente espaçados sobre um ângulo reto. Note que os pedaços de barbante esticados são hipotenusas de triângulos com a soma das medidas dos catetos constante.

Pouco se comenta que existe uma parábola tangenciando cada linha dessa coleção, ou, em outras palavras, que a *curva envolvente* criada por essas linhas é uma parábola.

os valores $c^2 \pm a^2$ são positivos, implicando em 4 soluções reais para $x^2 = c^2 \pm a^2$, o que indica que o gráfico assume a forma de 2 curvas fechadas disjuntas. Já com $c = a$, $x^2 = c^2 \pm a^2$ resulta em $x = \pm\sqrt{2}\,a$ ou em $x = 0$: os 3 pontos em que a lemniscata intersecta o eixo x.

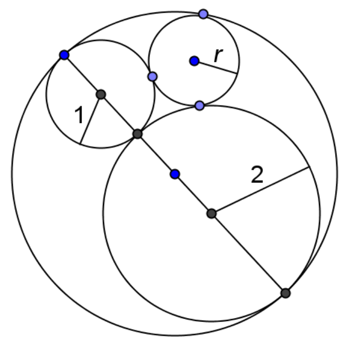
3 – Se o ponto P "vê" os três lados de um triângulo ABC sob ângulos de medidas iguais, segue que $APB = APC = BPC = 360°/3 = 120°$. Portanto, basta obtê-lo como intersecção entre os arcos capazes desse ângulo em relação a dois de seus lados, como ilustrado na construção ao lado, acompanhada de roteiro.



Problemas propostos

1 – A galáxia de Andrômeda está a 4 milhões de anos-luz da Terra. O surgimento dos hominídeos coincide com a partida da luz desta galáxia, que chega hoje a nós. Se fizermos corresponder o diâmetro estimado da nossa galáxia a 1cm, a que distância estaria Andrômeda?

2 – Observe as quatro circunferências ao lado, com seus pontos de tangências e centros indicados, e calcule o raio r com o auxílio do teorema de Stewart.

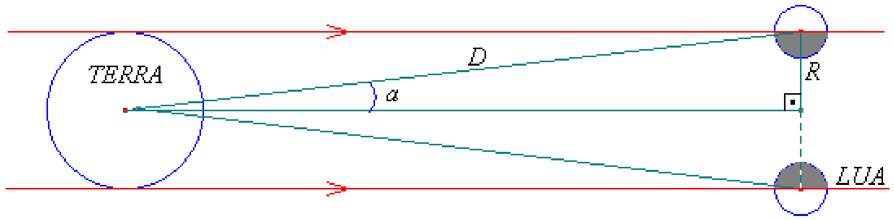


3 – Construir geometricamente uma semicircunferência inscrita em um triângulo isósceles, de modo que seu diâmetro esteja contido na base desse triângulo.

Problemas

Resolução dos problemas propostos no número anterior

1 – Relata-se que Aristarco, alguns anos depois da famosa medição da circunferência (ou do raio) da Terra, realizada por Eratóstenes, estimou a distância que nos separa da Lua valendo-se de um eclipse lunar total. Veja a figura, onde as linhas com as setas são os raios do Sol, R é o raio da Terra e D é a distância Terra-Lua.

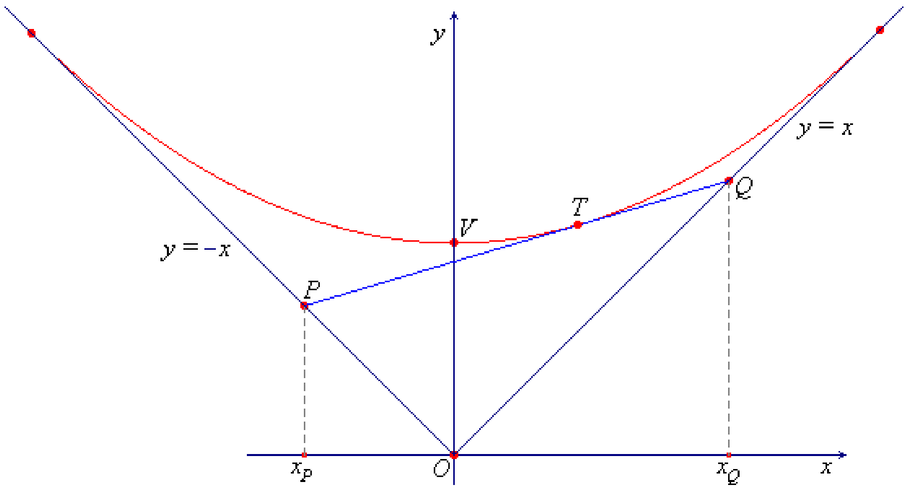


Para obter o ângulo a, mediu o tempo t gasto para a Lua deslocar-se $2R$, como indicado na figura, e aplicou a proporção $\frac{t}{27{,}322} = \frac{2a}{360^\circ}$, em que o número 27,322, em dias, indica o mês lunar (tempo durante o qual a Lua dá uma volta em torno da Terra). Em posse desse ângulo, pôde estimar D pelo quociente $R / \operatorname{sen} a$.

2 – A espírica de equação $\left(x^2 + y^2\right)^2 - 2c^2\left(x^2 - y^2\right) = a^4 - c^4$ tem gráfico simétrico em relação ao eixo y (e também em relação ao eixo x), uma vez que são pares os expoentes da variável em questão. O número de intersecções com o eixo x sugere a forma dessa curva. Para tanto, façamos $y = 0$. Com isso: $x^4 - 2c^2x^2 + c^4 - a^4 = 0$. Verifique que essa equação biquadrada em x tem discriminante $4a^4$ e que suas raízes x devem então satisfazer a condição $x^2 = c^2 \pm a^2$. Se $c < a$, x é real só se $x^2 = c^2 + a^2$, ou seja, fornecendo 2 valores, o que significa que a curva intersecta o eixo x em somente 2 pontos, assumindo a forma de uma curva única fechada. Com $c > a$, ambos

Vamos iniciar o trabalho de demonstrar esse fato com um exemplo, adotando $2\sqrt{2}$ para soma das distâncias dos pontos de fixação do barbante ao vértice do referido ângulo, pondo-o com lados nas bissetrizes dos dois primeiros quadrantes de um plano cartesiano.

Observando a figura abaixo, devemos ter $OP + OQ = 2\sqrt{2}$. Assim, se $x_Q = k$, com $0 \le k \le 2$, temos $OQ = k\sqrt{2}$ e, portanto, $OP = 2\sqrt{2} - k\sqrt{2} = (2 - k)\sqrt{2}$, diagonal de um quadrado de lado $2 - k$. Com isso, ficamos conhecendo $Q(k, k)$ e $P(k - 2, 2 - k)$. Então, a reta PQ, de coeficiente angular $(k - 1)$, tem equação $y - k = (k - 1)(x - k)$.



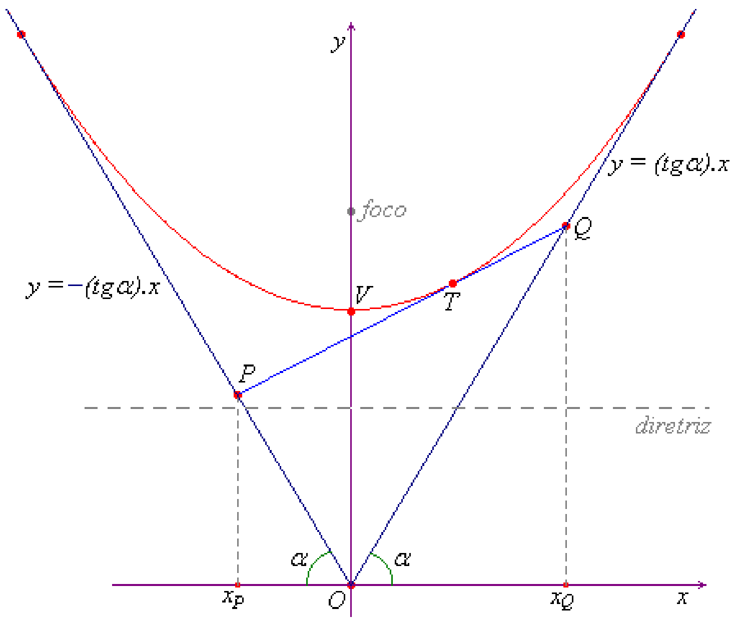
Conclusão: para cada k real ($0 \le k \le 2$), temos uma reta que é tangente, em certo ponto $T(x, y)$, à curva envolvente que queremos conhecer. No caso em questão, a tal reta, cuja equação pode ser reescrita por $k^2 - (x + 2)k + x + y = 0$, deve apresentar para k uma só solução. E já que se trata de uma equação quadrática, seu discriminante deve ser nulo, o que conduz a $y = ¼\, x^2 + 1$, reconhecidamente a equação de uma parábola, na qual esperávamos chegar.

É sabido, por outro lado, que a parábola é constituída de pontos, cada qual, com a propriedade de ser equidistante de um ponto dado (seu foco) e de uma reta dada (sua diretriz), como apresentado na **RMCA 12**. Uma parábola de equação $(x - m)^2 = 4p(y - n)$, onde p é seu parâmetro, tem eixo de simetria paralelo ao eixo das ordenadas, vértice $V(m, n)$, diretriz $y = - p + n$ e foco $F(m, p + n)$.

Reescrevendo a equação encontrada $y = ¼\, x^2 + 1$ nessa forma, fica assim: $(x - 0)^2 = 4(y - 1)$. Ela nos revela parâmetro $p = 1$, vértice $V(0, 1)$, diretriz $y = - 1 + 1 = 0$ e foco $F(0, 1 + 1) = (0, 2)$, com o eixo y como o de simetria.

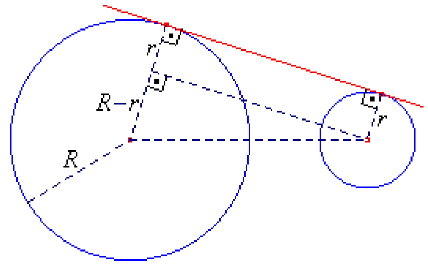
Vamos proceder agora a uma generalização. Sem perdê-la, podemos posicionar na origem O o vértice do ângulo que delimita a curva envolvente, tendo como bissetriz a parte positiva do eixo y. Denominemos S a soma das distâncias dos pontos de fixação do barbante ao vértice desse ângulo.

Como se pode observar na figura a seguir, os lados dos ângulos estão contidos nas retas de equações $y = (\text{tg}\alpha)\cdot x$ e $y = - (\text{tg}\alpha)\cdot x$. Daí, com $x_Q = k$, Q fica com coordenadas $(k, (\text{tg}\alpha)\cdot k)$.

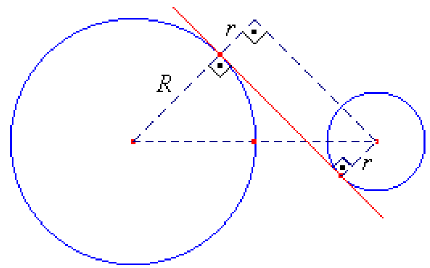


CG: retas tangentes a circunferências

Considere o diâmetro AB de uma circunferência. Todos os pontos dessa circunferência, com exceção de A e B, veem o segmento AB sob ângulo reto. Trata-se de um caso especial de arcos capazes desse ângulo em relação a um segmento dado. Assim, são sempre retângulos os triângulos inscritos em uma semicircunferência, desde que seu maior lado coincida com o diâmetro dela. Esse fato é vastamente explorado em construções geométricas como a que nos proporemos aqui efetuar: o traçado de tangentes a duas circunferências com soma das medidas dos raios menor que a distância entre seus centros. Para tanto, estudemos primeiramente parte da figura acabada, contendo elementos norteadores da construção.



Na figura, o vértice do triângulo retângulo com cateto conhecido (de medida $R - r$) pertence a uma semicircunferência de diâmetro com extremidades nos centros das circunferências dadas, como descrito acima. Além disso, esse mesmo vértice também pertence à circunferência concêntrica à maior, de raio medindo $R - r$. Uma vez obtido tal vértice por intersecção dessas curvas, é só traçar uma reta que passa por ele e pelo centro da circunferência de raio R. Ela intersectará essa circunferência num ponto pelo qual passa a reta tangente procurada, a saber, a perpendicular, por esse ponto, à reta recém-traçada. Uma construção simétrica à reta que passa pelos centros das circunferências dadas permite obter a outra tangente.

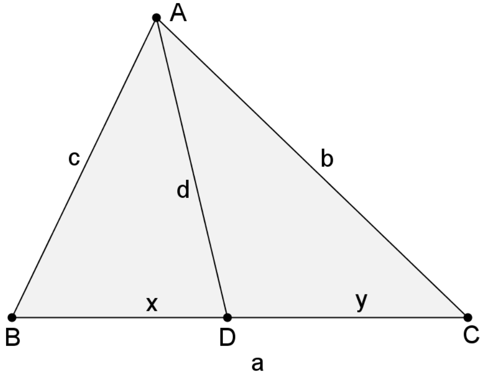


Observe a figura ao lado e encontre um roteiro para a construção das outras duas retas tangentes, também soluções.

O teorema de Stewart

É devido a Matthew Stewart (1717 – 1785) um resultado da Geometria que envolve segmentos de um triângulo, como ilustrado ao lado. Com essas informações, vale o seguinte:

$$b^2x + c^2y - d^2a = xya$$



Demonstração: Aplicando-se a lei dos co-senos nos triângulos ABD e ACD vem:

$c^2 = d^2 + x^2 - 2dx\cdot\cos(ADB)$;

$b^2 = d^2 + y^2 - 2dy\cdot\cos(ADC)$.

Como são suplementares os ângulos com vértice em D, cos(ADC) = – cos(ADB). Daí:

$$\cos(ADB)=\frac{d^2+x^2-c^2}{2dx}=\frac{b^2-d^2-y^2}{2dy}\rightarrow b^2x - d^2x - xy^2 = d^2y + x^2y - c^2y$$

$$\rightarrow\ b^2x + c^2y - d^2(x + y) = xy(x + y)\ \rightarrow\ b^2x + c^2y - d^2a = xya.$$

Na **RMCA 11** obtivemos uma fórmula para a mediana de um triângulo. Tente consegui-la com o auxílio do teorema de Stewart.

Ainda com a utilização desse teorema, é possível fabricar uma fórmula para a bissetriz de um triângulo. Suponhamos que, na figura acima, AD seja uma bissetriz. Do teorema das bissetrizes, segue que $cy = bx$, ou que $y = bx/c$. Substituindo em $b^2x + c^2y - d^2a = xya$, vem: $b^2x + bcx - d^2a = abx^2/c\ \rightarrow\ d^2a = bx(b + c - ax/c)$ [*]. Agora, como $y = a - x$ e $cy = bx$ então: $c(a - x) = bx \rightarrow ac - cx = bx \rightarrow ac = (b+c)x \rightarrow x = ac/(b + c)$. Substituindo-se esse valor de x em [*], após algumas manipulações algébricas (tente efetuá-las!), obtém-se:

$$d^2 = bc\left[1-\left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right]$$

Como $k = OQ\cdot\cos\alpha$ e $OQ + OP = S$, então $OP = S - \dfrac{k}{\cos\alpha}$.

Disso, $|x_P| = OP\cdot\cos\alpha = S\cdot\cos\alpha - k$, ou, $x_P = k - S\cdot\cos\alpha$ e, também, $y_P = -(\text{tg}\alpha)\cdot x_P = S\cdot\text{sen}\alpha - k\cdot\text{tg}\alpha$. O ponto P fica, portanto, dado por $(k - S\cdot\cos\alpha,\ S\cdot\text{sen}\alpha - k\cdot\text{tg}\alpha)$. Daí, a reta PQ, de coeficiente angular $\dfrac{2k\cdot tg\alpha - S\cdot sen\alpha}{S\cdot cos\alpha}$, tem equação $y - k\cdot\text{tg}\alpha = \dfrac{2k\cdot tg\alpha - S\cdot sen\alpha}{S\cdot cos\alpha}\,(x - k)$.

Para atender aos nossos propósitos, como feito anteriormente com o exemplo inicial, vamos escrevê-la na seguinte forma equivalente: $(2\text{tg}\alpha)\cdot k^2 - (2S\cdot\text{sen}\alpha + 2x\cdot\text{tg}\alpha)\cdot k + S\cdot x\cdot\text{sen}\alpha + S\cdot y\cdot\cos\alpha = 0$.

Para cada k real ($0 \le k \le S\cdot\cos\alpha$, com $0 < \alpha < \pi/2$) essa reta deve ter um só ponto em comum $T(x, y)$ com a curva envolvente. Isso significa que o discriminante da equação acima, em k, deve ser nulo, acarretando em $y = \dfrac{sen\alpha}{2S\cdot cos^2\alpha}x^2 + \dfrac{S\cdot sen\alpha}{2}$, a equação de uma parábola, como queríamos demonstrar.

Colocando-a na forma $(x - 0)^2 = \dfrac{2S\cdot cos^2\alpha}{sen\alpha}\left(y - \dfrac{S\cdot sen\alpha}{2}\right)$, vemos claramente que possui vértice $V\left(0,\dfrac{S\cdot sen\alpha}{2}\right)$, parâmetro $p = \dfrac{S\cdot cos^2\alpha}{2\cdot sen\alpha}$, diretriz $y = \dfrac{S\cdot sen\alpha}{2} - \dfrac{S\cdot cos^2\alpha}{2\cdot sen\alpha} = -\dfrac{S\cdot cos(2\alpha)}{2\cdot sen\alpha}$ e foco $F\left(0,\dfrac{S\cdot sen\alpha}{2} + \dfrac{S\cdot cos^2\alpha}{2\cdot sen\alpha}\right) = \left(0,\dfrac{S}{2\cdot sen\alpha}\right)$.

Em posse desses dados, analise você, leitor, o comportamento do gráfico das parábolas com α fixo e S variando, bem como com o caso contrário. Utilize programas de computador que traçam gráficos para auxiliá-lo nessa tarefa. No *winplot*, por exemplo, é possível animar os parâmetros envolvidos.

Distâncias astronômicas II

Quando medimos distâncias é necessário fazer uso de unidades adequadas para tanto. Não é comum exprimir a distância entre cidades em metros ou centímetros, ainda que se disponha de potências de 10 como recurso. Criamos unidades múltiplas (ou submúltiplas) para que a noção da distância seja mais comodamente assimilada e/ou para que o valor que a representa não seja composto de quantidade excessiva-mente grande de algarismos.

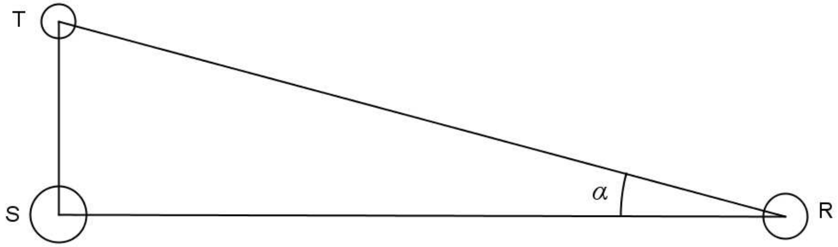
Em distâncias astronômicas, utilizamos várias unidades, tais como a distância Terra-Sol (a Unidade Astronômica: U.A.), para medidas nas imediações do Sistema Solar; o ano-luz e o parsec, para medidas interestelares.

A luz é o ente físico cuja velocidade é tida como referência no meio em que se propaga. Segundo a Teoria da Relatividade, a matéria, por possuir massa, não pode atingi-la. É estimada em quase 300.000 km/s no vácuo. A distância que ela percorre em 1 ano nesse meio é denominada ano-luz. Como 1 ano possui $365\times24\times60\times60$ = 31.536.000 segundos, 1 ano-luz equivale a 300.000×31.536.000 km, ou a cerca de $9{,}5\times10^{12}$ km (nove e meio trilhões de quilômetros).

Como vimos, a Lua está a uma distância média de 384.000 km da Terra. Podemos dizer então que a Lua se encontra a pouco mais de 1 segundo-luz de nós. Já os cerca de $1{,}5\times10^8$ km que nos separam do Sol são equivalentes a $1{,}5\times10^8 / 9{,}5\times10^{12} \cong 1{,}6\times10^{-5}$ ano-luz ou a aproximadamente 8,5 minutos-luz (verifique!). Isso significa que sua posição no céu está sempre atrasada em cerca de 8,5 minutos, ou que, se ele se apagasse instantaneamente agora, perceberíamos esse evento após esse intervalo de tempo.

Comparações: *a*) fazendo a distância Terra-Lua corresponder a 1 cm, o ano-luz corresponde a aproximadamente 245 km; *b*) fazendo a distância Terra-Sol corresponder a 1 cm, o ano-luz corresponde a cerca de 630 m.

Paralaxe é o efeito produzido pela aparente mudança de posição de um corpo em virtude da diferença entre os locais de sua observação. Pode ser percebido alternando-se o fechamento de nossos olhos quando observamos uma imagem. O ângulo de paralaxe é aquele com vértice em um ponto da imagem e com lados contendo os olhos. Na Astronomia esse ângulo é muito utilizado para estimar distâncias que nos separam de corpos celestes observados, tendo usualmente o Sol e a Terra em seus lados.



Chamamos de *parsec* a distância correspondente ao ângulo de paralaxe (com respeito à distância Terra-Sol) de medida 1” (1/3600 do grau). No triângulo retângulo em S acima, RS mede 1 *parsec* quando α = 1”. Esse ângulo é pequeno o suficiente para considerarmos praticamente iguais as distâncias RS e RT.

Parsec é resultado da contração de *par*alaxe e *sec*ond.

Em quilômetros, 1 *parsec* é calculado assim: cotg 1” = SR/ST $\rightarrow$ SR = ST$\cdot$cotg 1” $\rightarrow$ 1 *parsec* $\cong 1{,}5\times10^8 \cdot 206.265 \cong 3{,}09\times10^{13}$km.

A distância de 1 *parsec* é $3{,}09\times10^{13} / 9{,}5\times10^{12} \cong 3{,}25$ vezes o ano-luz e $3{,}09\times10^{13} / 1{,}5\times10^8 \cong 206.000$ vezes a U.A. Isso quer dizer que, se fizermos corresponder a distância Terra-Sol a 1 cm, o *parsec* corresponderá a pouco mais de 2 km.

Em 1915 foi descoberta a estrela mais próxima do Sol, que ficou chamada Próxima Centauri. A apenas 4,23 anos-luz (ou 1,3 *parsec*), não é visível a olho nu. Seu ângulo de paralaxe mede 0,77”.

Você é capaz de confirmar esses números com cálculos?